Департамент образования города Москвы
Государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования города Москвы
«Московский городской педагогический университет»
Самарский филиал

Г. А. Клековкин

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

*Учебное пособие
для учащихся 10–11-х классов*

Самара
2016

УДК 514.18(075)
ББК 22.151.3
К48

Печатается по решению Ученого совета СФ ГАОУ ВО МГПУ

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор *С. Л. Атанасян*;
доктор физико-математических наук, профессор *П. Н. Михайлов*;
кафедра физико-математического образования СИПКРО
(заведующий кафедрой, кандидат педагогических наук
А. А. Максютин)

Клековкин Г. А.
К48 Изображение геометрических фигур в параллельной проекции: учебное пособие для учащихся 10–11-х классов / Г. А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. – 132 с.

В пособии даны теоретические основы построения изображений в параллельной проекции основных фигур школьного курса геометрии. Содержание и выбранные способы изложения учебного материала достаточно хорошо согласуются со всеми рекомендованными к использованию в старшей школе УМК по геометрии. Пособие содержит сведения о возможностях встроенного графического редактора пакета MS Office, имеющейся практически во всех школах программы MS Word и рекомендации по построению геометрических чертежей в этом редакторе.

Пособие предназначено для старшеклассников и абитуриентов, предстоящий профессиональной выбор которых будет связан с конструктивно-геометрической деятельностью. Учителя математики могут использовать пособие для разработки и проведения соответствующих элективных курсов для учащихся 10–11-х классов.

УДК 514.18(075)
ББК 22.151.3

Содержание

Введение

1. *Графические изображения в жизнедеятельности человека.* Невозможно представить полноценной жизнь современного человека без различного рода рисунков, чертежей, диаграмм, графиков, схем. Рисунки и чертежи могут порой передать гораздо больше информации, чем живое или печатное слово. К тому же графический язык интернациональный. Так, например, грамотно выполненный сборочный чертеж понятен любому технически образованному человеку, на каком бы языке он не говорил.

Потребность изображать пространственные формы на плоскости появилась у человека еще в глубокой древности. Стоит вспомнить хотя бы рисунки на стенах пещер, на которых древний человек пытался рассказать своим соплеменникам об удачной охоте, предупреждал их об опасности и т. п. Появление первых чертежей связано со строительством укреплений, ритуальных сооружений, городских построек. История показывает, что уже египетские пирамиды и храмы, величайшие сооружения Древней Греции и Рима были построены по первоначально выполненным чертежам. Понятно, что первые чертежи выполнялись на земле там, где предполагалось вести будущее строительство; затем их стали выполнять на глиняных дощечках, папирусе, бумаге. Одновременно с этим формировались правила выполнения чертежей, создавались и совершенствовались чертежные инструменты.

Основы науки о способах изображения пространственных фигур на плоскости заложили древнегреческие ученые: Эсхил, Демокрит, Евклид, Витрувий, Птолемей. Изучением изображений окружающей действительности, близких к зрительному восприятию, занимались ученые, архитекторы и художники эпохи Возрождения. Большой вклад в теорию таких изображений внес итальянский художник и ученый Леонардо да Винчи. Следует отметить заслуги немецкого математика, гравера и художника Альбрехта Дюрера. Позднее существенную роль в становлении и развитии науки о методах изображений сыграл французский геометр и инженер Гаспар Монж.

2. *Некоторые виды изображений*. В различных видах человеческой деятельности к изображениям предъявляют свои специфические требования, обусловленные целями и характером выполняемой деятельности. Если, например, в технике нужно по изображению детали восстановить ее с точностью до оригинала, то в живописи (разумеется, реалистической) изображение должно лишь создавать такое же впечатление, как и сам оригинал. Поэтому в техническом черчении и живописи используются разные способы изображений; чаще всего – это некоторые проекции оригинала на плоскость. Рассмотрим примеры проекционных изображений и требования к ним, которые встречаются в некоторых сферах человеческой практики.

1. В технике, как уже сказано, по чертежам, где бы они не были выполнены, важно суметь восстановить оригинал с точностью до формы и размеров. Здесь обычно используются чертежи, при выполнении которых применяют метод Монжа. Суть этого метода заключается в том, что изображаемый предмет (деталь) проектируют на две взаимно перпендикулярные плоскости: фронтальную V и горизонтальную H. Часто рассматривается проекция на третью перпендикулярную к ним плоскость, которую называют профильной и обозначают W (рис. 1).

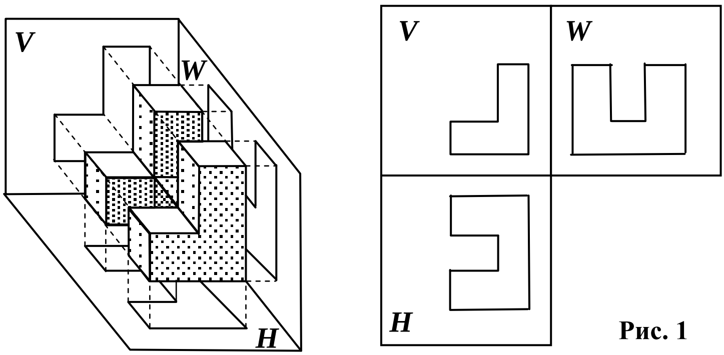


Рис. 1

Эти проекции представляют собой вид предмета спереди, сверху и сбоку соответственно. Иногда эти проекции оставляют в натуральную величину, иногда уменьшают или увеличивают с указанием масштаба. Такой чертеж можно перевезти или переслать в любое место и там восстановить деталь так, что она будет отличаться от оригинала лишь положением в пространстве.

2. Формально для художника-реалиста важно достичь максимального сходства с оригиналом; нужно чтобы при взгляде на картину зритель получал такое же впечатление, что и от оригинала. Как удается получать такие изображения.

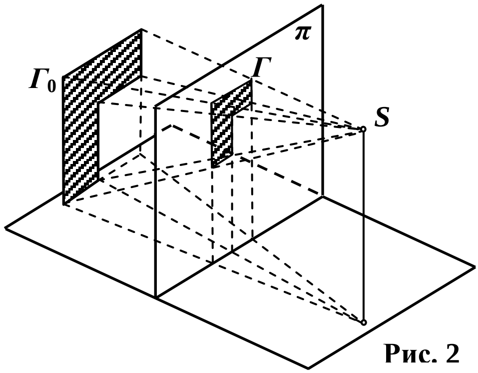


Рис. 2

На рисунке 2 показан предмет Γ_0, глаз наблюдателя находится в точке S. Если между предметом и глазом поместить картинную плоскость π и спроектировать все точки предмета из точки S на эту плоскость, получим изображение Γ этого предмета. При этом глаз, расположенный в точке S, будет получать одинаковое впечатление и при рассмотрении самого предмета, и при рассмотрении его изображения.

Таким образом, нужного эффекта можно достичь, используя центральное проектирование. Изображение Γ предмета Γ_0 называют *перспективой*.

Перспектива существенно зависит от расположения предмета, точки зрения и картинной плоскости.

Поэтому художник при написании картины или фотограф во время съемки точку зрения стараются выбрать так, чтобы она соответствовала естественному положению зрителя, который в дальнейшем будет рассматривать их произведения. Ошибки неудачного выбора элементов перспективы хорошо известны. Например, при неудачном выборе ракурса при съемке человека можно получить неестественно большие руки или ноги.

3. Нетрудно усмотреть некоторые недостатки перспективных изображений, в частности геометрических чертежей, и при фронтальном использовании их в качестве наглядности в школьной практике. В классе ученики все по-разному расположены по отношению к демонстрируемому наглядному материалу. Поэтому ученик, находящийся далеко от точки зрения, может получить от демонстрации искаженное впечатление. Наконец, выполнение перспективных изображений является доста-

точно трудоемким. Поэтому в школьной практике применяется не центральное, а *параллельное* проектирование.

Параллельное проектирование можно представить как частный случай центрального. Если точку зрения S удалять в бесконечность, то проектирующие прямые будут почти параллельными. Поэтому параллельная проекция фигуры соответствует ее зрительному восприятию при рассмотрении из точки, достаточно удаленной от фигуры. Такая ситуация как раз и имеет обычно место при демонстрации чертежей на классной доске.

Конечно, на чертеже, исполненном в параллельной проекции, больше искажений и условностей, но такой чертеж проще выполняется. Кроме того, у нас достаточно быстро формируется привычка нужным образом воспринимать и читать эти чертежи.

В курсе геометрии к рисункам и чертежам плоских и пространственных фигур также предъявляются свои требования. Основными из них являются следующие.

А. Изображение должно быть *верным*. Это значит, что изображенная фигура должна в действительности существовать. Так, на рисунке 3 изображен так называемый треугольник Пенроуза. Кажется, что действительно на рисунке показана некото-

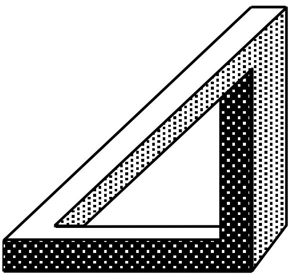


Рис. 3

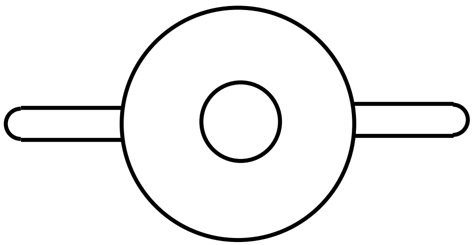


Рис. 4

рая пространственная фигура. Однако это только первое впечатление, в действительности такой фигуры не существует. Это изображение неверно. Тем не менее рисунки фигур типа треугольника Пенроуза получили специальное название «невозможных фигур», а многие люди увлечены их рисованием и изучением. Наверняка, многие из вас знакомы с удивительными невозможными мирами художника М. Эшера.

Б. Изображение должно быть *наглядным*, то есть должно вызывать пространственные представления об изображенном оригинале. Примером ненаглядного изображения может служить картинка-шутка, на которой мексиканец в сомбреро едет на велосипеде (рис. 4).

В. Изображение должно достаточно *быстро и легко выполняться*. Осуществление этого условия возможно в том случае, когда изображение проводится с помощью наиболее простых правил.

Изображения, удовлетворяющие этим трем требованиям, можно получить с помощью параллельного проектирования. При этом для обоснования правил изображения в параллельной проекции достаточно тех сведений, которые даются в разделах «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве» и «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве», которые изучаются в школьном курсе геометрии.

3. *Чертеж в процессе решения геометрических задач.* Решение геометрической задачи обычно начинается с построения чертежа. Графическая визуализация информации, содержащейся в условии задачи, зачастую играет определяющую роль в процессе ее решения. Правильно выполненное и наглядное изображение значительно облегчает отыскание нужных для решения ключевых соотношений между данными и искомыми элементами задачи, а в последующем помогает сделать исследование или анализ найденного решения. Особенно велика роль чертежей и рисунков при решении стереометрических задач.

Чтобы быстро, правильно и наглядно строить чертежи к стереометрическим задачам, необходимо прежде всего:

– иметь опыт восприятия натуральных моделей и готовых проекционных чертежей изучаемых в школе геометрических тел и их наиболее типичных комбинаций;

– знать принятые правила выполнения изображений;

– иметь определенные навыки вычерчивания геометрических фигур с помощью чертежных инструментов и от руки;

– обладать собственным опытом выполнения изображений основных геометрических тел и их комбинаций.

Вспомним теперь, как осуществляется процесс построения чертежа (рисунка) для значительной части трудных стереометрических задач. Чаще всего для выполнения такого чертежа требуется несколько попыток. Исходный мысленный образ геометрической конфигурации, порождаемый условиями и требованиями задачи, служит основой для первичного чертежа, который выполняется во внешнем плане (на листе бумаги или классной доске). Затем полученное изображение опять соотносится с условиями и требованиями задачи. Неудачный чертеж генерирует новые гипотезы и в следующий чертеж вносятся необходимые коррективы.

Лишь после того, когда удается «увидеть» в чертеже соотношения, которые, как нам кажется, могут указать путь к решению, чертеж приобретает требуемый вид.

В дальнейшем построенный чертеж является внешним источником, из которого черпаются идеи решения задачи, и пробным камнем, на котором они проверяются, оцениваются и уточняются.

Таким образом, для того чтобы выполнить верный и наглядный чертеж к трудной стереометрической задаче, нужно обладать хорошо развитыми пространственными воображением и мышлением, которые позволяют по условиям задачи создать мысленный образ геометрической конфигурации, рассматриваемой в задаче, и, в случае необходимости, его трансформировать в заданном направлении.

Для решения большого числа стереометрических задач строить проекционный чертеж вовсе не требуется. В них важно мысленно «увидеть», что можно обойтись изображением некоторого сечения рассматриваемой геометрической конфигурации (или ее проекции, например, на плоскость основания). В качестве такого примера возьмем следующую задачу.

Задача. *Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту, при этом вершина каждой из пирамид лежит в центре основания другой, а боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро первой пирамиды равно 4 и образует с высотой угол* $\frac{\pi}{6}$*, а боковое ребро второй пирамиды образует с высотой угол* $\frac{\pi}{3}$*. Найдите объем общей части этих пирамид*.

Построив проекционный чертеж (рис. 5, *а*) к этой достаточно простой задаче, видим, что общая часть данных пирамид является объединением двух пирамид с общим основанием (об этом, разумеется, можно было догадаться и не выполняя построение чертежа). Кроме того, становится ясно, что строить проекционный чертеж было совсем необязательно, для решения задачи достаточно изобразить сечение рассматриваемой комбинации пирамид плоскостью, проходящей через пару их пересекающихся ребер и общую высоту (рис. 5, *б*). После этого выполнение необходимых вычислений займет времени гораздо меньше, чем заняло построение проекционного чертежа.

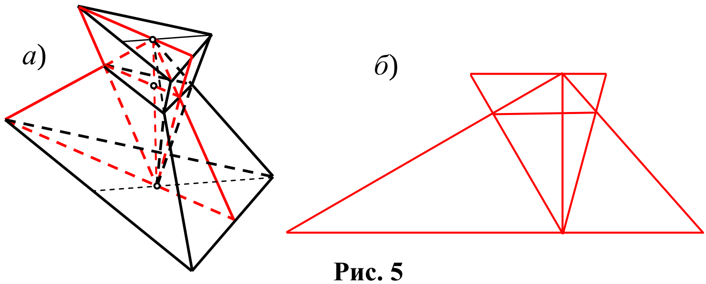


Рис. 5

Однако опыт «видения» нужных сечений и проекций также приходит только в результате самостоятельного выполнения «ненужных» проекционных чертежей к подобным задачам.

Пространственное воображение и пространственное мышление необходимы не только на уроках стереометрии, без них невозможно в дальнейшем изучать большинство специальных учебных дисциплин в технических и других вузах. Способность оперировать пространственными образами служит основой продуктивной творческой деятельности конструкторов и инженеров, архитекторов и строителей, художников и дизайнеров, моделеров и т. д.

Решение стереометрических задач и особенно выполнение чертежей к этим задачам является важнейшим средством развития пространственного мышления и способностей, необходимых для успешной конструкторско-геометрической деятельности. К сожалению, построение хорошего проекционного чертежа требует больших временных затрат, поэтому при изучении курса геометрии не всегда удается накопить опыт, необходимый для их выполнения. При этом изучение теоретических основ построения изображений геометрических фигур не является в школе приоритетной задачей; в учебниках геометрии, в лучшем случае даются азы теории изображений геометрических фигур в параллельной проекции. При практическом выполнении чертежей к стереометрическим задачам также по большей части приходится опираться не на теорию изображений, а на готовые чертежи, которые приведены в учебнике, и чертежи, которые строит учитель на классной доске.

4. *Цели и некоторые особенности элективного курса.* Основными целями элективного курса «Изображение геометрических фигур в параллельной проекции» являются:

– изучение математических начал теории изображений геометрических фигур в параллельной проекции;

– формирование на этой основе умений и навыков самостоятельного выполнения проекционных чертежей к стереометрическим задачам;

– развитие способности оперировать пространственными образами, необходимой для успешного изучения геометрии в школе, а в дальнейшем таких дисциплин, как «Начертательная геометрия», «Компьютерная графика», «Компьютерный дизайн» и пр. в системе высшего профессионального образования.

В результате происходящей на наших глазах информационной революции стремительно расширяются масштабы использования разнообразных графических средств во всех сферах жизни общества. Это обусловлено такими качествами графических изображений, как их образность, компактность и относительная легкость прочтения. Некоторыми специалистами прогнозируется, что в ближайшем будущем около 60–70 % информации будет иметь графическую форму предъявления.

Компьютер и информационные технологии радикально изменили веками существовавшие представления о способах создания, хранения и последующего использования графической информации; открыли новую эпоху в области технико-технологических приложений геометрии. Современные программные средства для работы с графикой позволяют не просто автоматизировать процессы выполнения чертежей и обработки изображений, у конструкторов и инженеров появилась возможность графически моделировать и в динамическом режиме исследовать производственные процессы, работу сложных технических устройств, конструировать и создавать новые машины и механизмы. Сказанное, однако, не означает, что современному специалисту не требуется знать теорию изображений, наоборот, требования к его геометрической подготовке и общей математической культуре не только не уменьшаются, но и выходят на новый, более высокий уровень.

Практика показывает, что многие школьники достаточно легко и успешно осваивают различные графические редакторы и пакеты такие, например, как 3D Max. Однако школа вряд ли может себе позволить иметь такой дорогостоящий программный продукт. Вместе с тем даже встроенный графический редактор пакета MS Office, имеющейся практически во всех школах программы MS Word, может стать надежным помощником при изучении стереометрии. Этот редактор содержит общераспространенные инструменты создания, рисования, выделения, редактирования, группировки и разгруппировки геометрических объектов; позволяет вставлять в рисунки и чертежи текст; выполнять их масштабирование и т. д. Поэтому, освоив графический редактор пакета MS Office, можно, кроме того, получить начальные навыки работы в графических редакторах и пакетах.

Несмотря на небольшие искажения, которые возникают при оперировании объектами, редактор позволяет строить вполне приемлемые изображения достаточно сложных комбинаций геометрических тел. В руках пользователя, имеющего минимум знаний по теории изображений в параллельной проекции, он может стать эффективным инструментом для построения чертежей к школьным стереометрическим задачам. Его можно успешно использовать при выполнении индивидуальных и групповых проектов с геометрической тематикой. При создании различных презентаций рисунки и чертежи, выполненные в векторным графическом редакторе пакета MS Office, можно вставить в любой файл этого пакета (Word, PowerPoint, Publisher и т. д.), в частности размещать их на слайдах полюбившейся многими пользователями программы PowerPoint.

Поэтому еще одной целью элективного курса является обучение построению изображений геометрических фигур в редакторе пакета MS Office и выполнение слушателями электива группового проекта по созданию электронной библиотеки изображений геометрических тел, которую в дальнейшем можно использовать при решении задач в базовом или профильном курсе геометрии.

Хочется надеяться, что предлагаемый элективный курс позволит компенсировать достаточно ограниченные возможности базовых и профильных курсов геометрии в удовлетворении образовательных потребностей старшеклассников в области геометрической графики, поможет им объективно оценить собственные способности и более эффективно подготовиться к освоению программ высшего профессионального образования.

§ 1. Параллельное проектирование и его свойства

1.1. ***Определение центрального и параллельного проектирования.*** Обычно изображения пространственных фигур на плоскости строят с помощью метода проекций. Чаще других используются центральное и параллельное проектирования.

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π и не лежащую на ней точку S (рис. 6). Пусть A_0 – произвольная точка пространства, проведем через точки S и A_0 прямую a. Если прямая a пересекает плоскость π в точке A, то точка A называется *проекцией точки A_0 на плоскость π при центральном проектировании из точки S* (центральной проекцией точки A_0).

Пусть F_0 – плоская или пространственная фигура. Центральные проекции всех точек фигуры F_0 на плоскость π образуют на этой плоскости некоторую фигуру F, которая называется *центральной проекцией фигуры F_0*.

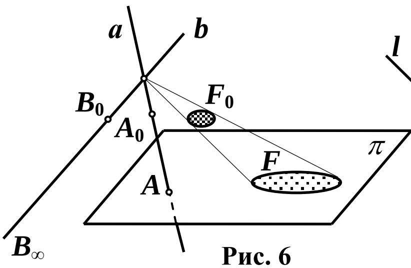


Рис. 6

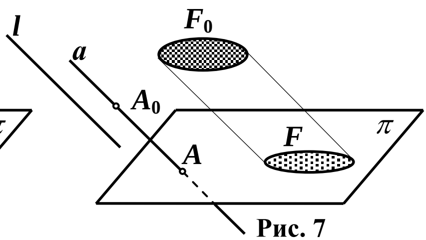


Рис. 7

Неудобства, которые возникают при использовании центрального проектирования, связаны с тем, что не всякая прямая, проходящая через *центр проектирования S*, пересекает плоскость π. Для любой прямой b, параллельной плоскости π, $b \cap \pi = \emptyset$ (рис. 6). Для изображения точек прямой b приходится вводить дополнительные правила – пополнять плоскость π новыми, так называемыми *несобственными* или *бесконечно удаленными* точками, и считать, что $b \cap \pi = B_\infty$. Эти трудности не возникают при использовании параллельного проектирования.

Пусть π – некоторая плоскость, а l – прямая, пересекающая эту плоскость (рис. 7). Рассмотрим произвольную точку A_0 пространства. Проведем через A_0 прямую a, параллельную прямой l, и обозначим через A точку пересечения этой прямой с плоскостью π. Точка A называется *проекцией точки* A_0 *на плоскость* π *при проектировании параллельно прямой* l (*параллельной проекцией точки* A_0). Далее, пусть F_0 – плоская или пространственная фигура. Параллельные проекции всех точек фигуры F_0 образуют на плоскости π некоторую фигуру F. Фигура F называется *параллельной проекцией фигуры* F_0.

Если прямая l, определяющая направление проектирования, перпендикулярна плоскости проекции π, то точка A называется *ортогональной* проекцией точки A_0. В этом случае проекция F фигуры F_0 также называется ортогональной.

Прямую, параллельную l, можно провести через любую точку пространства. Кроме того, мы знаем, что если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то ее пересекает и другая прямая. Поэтому при параллельном проектировании любая точка пространства имеет на плоскости π свою проекцию.

1.2. *Свойства параллельного проектирования.* Пусть π – плоскость проекции, l – прямая, которая задает направление параллельного проектирования. При формулировке свойств предполагается, что рассматриваемые прямые и отрезки не параллельны прямой l, определяющей направление проектирования. Поскольку в пункте рассматривается только параллельное проектирование, для краткости вместо словосочетания «параллельная проекция» употребляется слово «проекция».

1. *Проекция прямой есть прямая* (рис. 8).

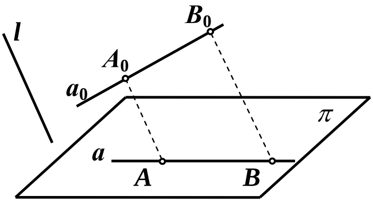


Рис. 8

Действительно, все прямые, пересекающие данную прямую a_0 и параллельные прямой l, лежат в одной плоскости. Эта плоскость, назовем ее *проектирующей плоскостью прямой* a_0, пересекает плоскость π по некоторой прямой a.

2. *Проекции параллельных прямых параллельны* (рис. 9), *либо совпадают* (рис. 10).

В самом деле, пусть $a_0 \| b_0$. Если прямые a_0, b_0 имеют общую проектирующую плоскость, то они проектируются в одну и ту же прямую. В том случае, когда проектирующие плоскости параллельных прямых a_0, b_0 различны, сами проектирующие плоскости параллельны (по признаку параллельности двух плоскостей). Но тогда они пересекают плоскость проекции π по параллельным прямым.

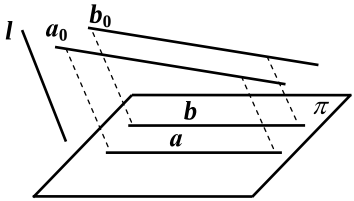


Рис. 9

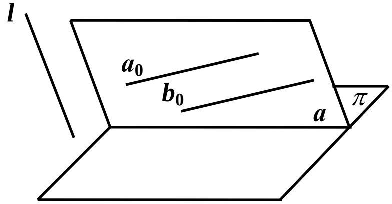


Рис. 10

3. *При параллельном проектировании сохраняется отношение трех точек прямой* (рис. 11).

Напомним определение отношения трех точек прямой.

Пусть A и B – две различные точки прямой и C – такая точка этой прямой, что

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}. \qquad (1)$$

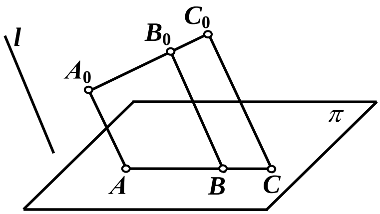


Рис. 11

Тогда говорят, что *точка C делит отрезок AB в отношении λ*, считая от точки A; число λ при этом называют *отношением трех точек A, B* и C. В литературе по геометрии для обозначения отношения λ трех точек прямой обычно употребляются записи: $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$, $\lambda = (AB, C)$. Будем использовать второе. Если точка C лежит между точками A и B, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ сонаправлены, при этом $\lambda > 0$. В данном случае точка C делит отрезок AB *внутренним* образом и $\lambda = \frac{AC}{CB}$ (рис. 12, *а*).

Если $C = A$, то $\lambda = 0$.

Если точка C лежит вне отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ направлены противоположно, а $\lambda < 0$ (рис. 12, *б*). В данном случае говорят, что точка C делит отрезок AB *внешним* образом и $\lambda = -\frac{AC}{CB}$. Поскольку при этом либо $AC > CB$, либо $AC < CB$, то $\lambda \neq -1$.

а) $\lambda > 0$ *б*) $\lambda < 0$

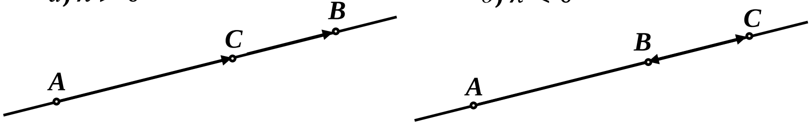


Рис. 12

Пусть точки A, B и C заданы векторами, отложенными от некоторой точки O (рис. 13), тогда равенство (1) можно переписать в виде: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$. Отсюда $(1+\lambda)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, и значит,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}. \qquad (2)$$

Если теперь провести все рассуждения в обратном порядке, то мы вернемся к формуле (1). Следовательно, точка C делит отрезок AB в данном отношении λ ($\lambda \neq -1$) тогда и только тогда, когда для любой точки O имеет место соотношение (2). Формулу (2) называют *формулой деления отрезка в данном отношении*. Ее частным случаем является *формула деления отрезка пополам*

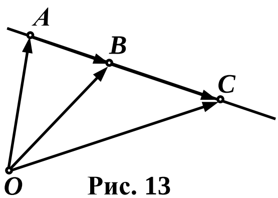


Рис. 13

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right), \qquad (3)$$

которая получается при $\lambda = 1$. Здесь $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ и, следовательно, $AC = CB$.

Справедливость свойства 3 вытекает из теоремы:

Если прямые l и l_1 пересечены тремя параллельными прямыми в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно, то $(AB, C) = (A_1B_1, C_1)$ (см. задачу 3).

На основании свойств 2, 3 доказываются свойства:

4. *Проекция отрезка A_0B_0 есть отрезок AB, где A, B – проекции точек A_0, B_0.*

5. *Проекция середины отрезка есть середина отрезка-проекции.*

6. *Проекции параллельных отрезков параллельны, либо принадлежат одной прямой.*

7. *Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков*.

Задачи и упражнения

1. На рисунках 14 представлены различные параллельные проекции куба. Как в каждом из этих случаев выбраны направление проектирования и плоскость проекции?

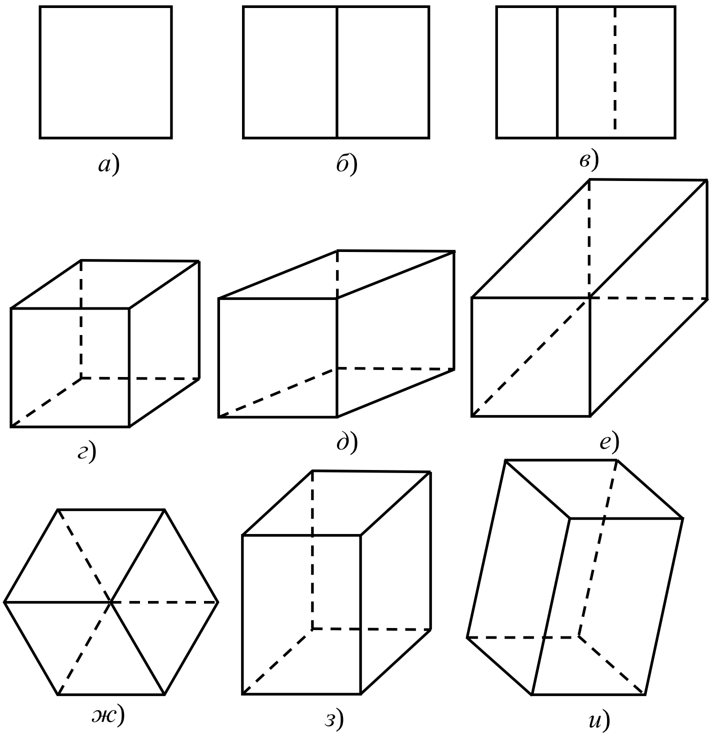


Рис. 14

2. На рисунках 15 представлены различные параллельные проекции правильной четырехугольной пирамиды. Как в каждом из этих случаев выбраны направление проектирования и плоскость проекции?

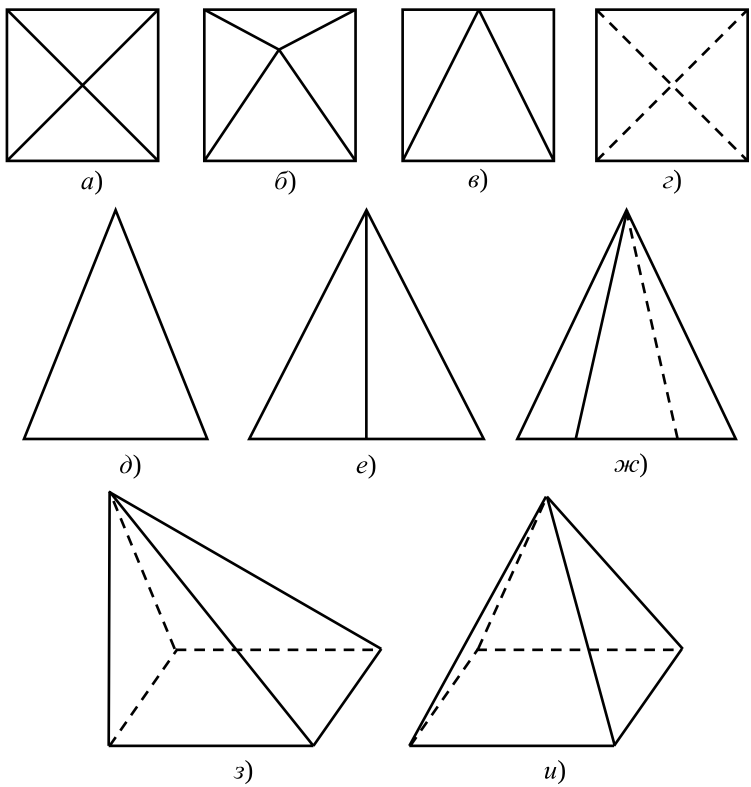


Рис. 15

3. Прямые l и l_1 пересечены тремя параллельными прямыми в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $(AB, C) = (A_1B_1, C_1)$.

4. Две прямые лежат в одной плоскости. Докажите, что если на одной из этих прямых отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки (*теорема Фалеса*).

5. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Фалеса.

6. Докажите свойства 4–7 параллельного проектирования.

7. Отрезок A_0B_0 параллелен плоскости π, AB – его параллельная проекция на плоскость π. Докажите, что $AB = A_0B_0$.

8. Плоскости π_1 и π_2 параллельны и l – пересекающая их прямая. Докажите, что проекции F_1 и F_2 фигуры F_0 на данные плоскости, параллельно прямой l, равны между собой.

9. Параллельные прямые l и l_1 пересечены тремя прямыми, проходящими через одну точку, в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $(AB, C) = (A_1B_1, C_1)$.

§ 2. Изображение многоугольников и многогранников

2.1. *Изображение фигуры.* Выберем некоторую плоскость π и назовем ее *плоскостью изображений*. Затем возьмем прямую l, пересекающую плоскость π, и спроектируем данную фигуру F_0 (плоскую или пространственную) на плоскость π параллельно прямой l. Полученную плоскую фигуру F' (проекцию фигуры F_0) или любую подобную ей фигуру F на плоскости π называют *изображением фигуры* F_0.

Возникает вопрос, почему изображением фигуры принято считать не только ее проекцию, но и любую фигуру, подобную этой проекции. Дело в том, что в реальной практике плоскостью изображений является плоскость листа бумаги или, например, плоскость классной доски. Бывает так, что проекция фигуры-оригинала не помещается на этом листе или доске. Наоборот, если фигура-оригинал достаточно мала, то малые размеры имеет и ее проекция, – с таким изображением также неудобно работать. Кроме того, проекция на плоскости изображения может оказаться неудобно расположенной. Во всех этих случаях и выручает преобразование подобия, которому подвергают проекцию оригинала.

Таким образом, при изображении фигур мы сталкиваемся с определенным произволом. Это выбор плоскости изображений, выбор направления проектирования и выбор подобия на плоскости изображений. Удачным считается такой выбор, при котором изображение является наглядным, удачно расположено и имеет удобные для работы размеры.

2.2. *Изображение плоских многоугольников.* Будем предполагать, что плоскость многоугольника не совпадает с плоскостью изображения и не является ей параллельной.

Теорема 1. *Изображением данного треугольника (в частности, равностороннего или равнобедренного) является произвольный треугольник.*

Доказательство. Пусть $A_0B_0C_0$ – произвольный треугольник. Выберем плоскость изображения π так, чтобы сторона A_0B_0 треугольника принадлежала этой плоскости, а вершина C_0 ей не принадлежала (рис. 16). Возьмем в плоскости π произвольный треугольник ABC и покажем, что его можно принять за изображение треугольника $A_0B_0C_0$. Для этого на отрезке A_0B_0, как на стороне, построим в плоскости π треугольник A_0B_0C' , подобный треугольнику ABC . Треугольник A_0B_0C' является проекцией треугольника $A_0B_0C_0$ на плоскость π параллельно прямой C_0C'. Поэтому треугольник A_0B_0C', а значит и подобный ему треугольник ABC, будут являться изображениями треугольника $A_0B_0C_0$. □

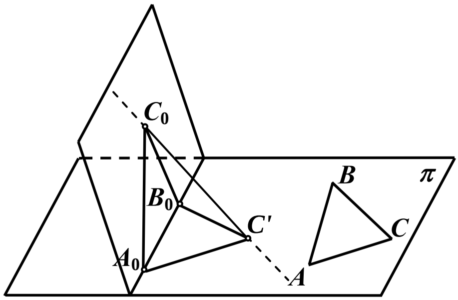


Рис. 16

Следствие. *Изображением данного параллелограмма (в частности, прямоугольника, квадрата и ромба) является произвольный параллелограмм.*

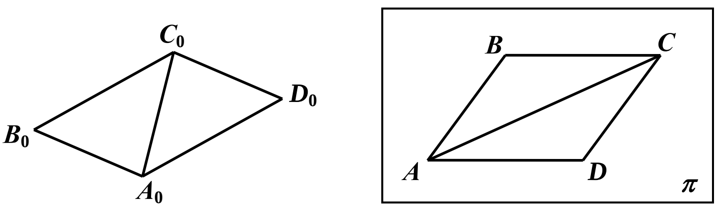


Рис. 17

Действительно, пусть $A_0B_0C_0D_0$ – данный параллелограмм и A_0C_0 – его диагональ, а $ABCD$ – произвольный параллелограмм на плоскости изображений π (рис. 17). Треугольник ABC, согласно теореме 1, можно принять за изображение треугольника $A_0B_0C_0$. Так как при параллельном проектировании и подобии параллельные прямые переходят в параллельные, то параллелограмм $ABCD$ будет изображением параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$.

Теорема 2. *Если дано изображение треугольника $A_0B_0C_0$, то можно построить изображение любой точки, принадлежащей плоскости этого треугольника.*

Доказательство. Пусть ABC – изображение треугольника $A_0B_0C_0$ и M_0 – произвольная точка в плоскости треугольника $A_0B_0C_0$ (рис. 18). Если через точку M_0 и вершины треугольника

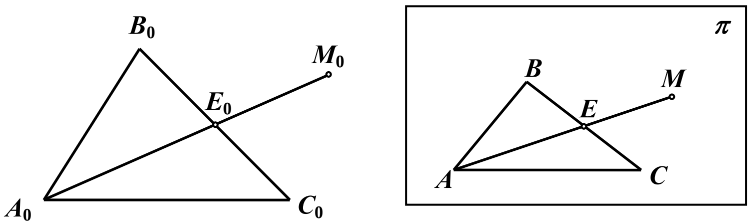


Рис. 18

$A_0B_0C_0$ провести прямые, то хотя бы одна из них пересечет прямую, содержащую соответствующую противоположную сторону треугольника. Пусть, например, прямая A_0M_0 пересекает прямую B_0C_0 в точке E_0. Поскольку при параллельном проектировании и подобии сохраняется отношение трех точек прямой, то изображение E точки E_0 можно построить. Точка E делит отрезок BC в том же отношении, в каком делит отрезок B_0C_0 точка E_0: $\frac{B_0E_0}{E_0C_0} = \frac{BE}{EC}$. При этом точка E лежит между точками B и C, если точка E_0 лежит между точками B_0 и C_0, а если точка E_0 лежит вне отрезка B_0C_0, то точка E также лежит вне отрезка BC.

Точка M должна лежать на прямой AE, а ее положение на этой прямой определяется соотношением: $\frac{A_0M_0}{M_0E_0} = \frac{AM}{ME}$. Двумя найденными пропорциями точка M однозначно определяется. □

При построении изображения тетраэдра нам потребуется следующее следствие доказанной теоремы.

Следствие. *Пусть E, E_1 – точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ соответственно. Если точки E, E_1 делят соответствующие диагонали четырехугольников в одинаковых отношениях, то каждый из этих двух четырехугольников может служить изображением другого четырехугольника.*

Из этого следствия, в частности, вытекает, что *в призме, основанием которой является один из четырехугольников, существует сечение, подобное второму четырехугольнику*.

Опираясь на теорему 2, можно построить изображение любого многоугольника. Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, решим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2.1. Даны отрезки AB и CD. Точка M принадлежит отрезку AB. Разделите отрезок CD точкой N в том же отношении, в каком точка M делит отрезок AB.

Решение. Пусть AB, CD – данные отрезки и точка M принадлежит отрезку AB (рис. 19). На отрезке CD требуется построить точку N такую, что $\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MB}$.

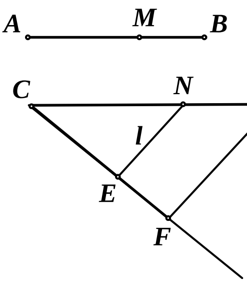


Рис. 19

Строим произвольный луч с началом в точке C. Откладываем на этом луче отрезки $CE = AM$ и $CF = AB$. Соединяем отрезком точки F, D и через точку E проводим прямую l, параллельную прямой FD. Прямая l пересекает отрезок CD в искомой точке N.

Действительно, треугольники CFD и CEN гомотетичны. Поэтому $\frac{CN}{CD} = \frac{CE}{CF}$. Отсюда $\frac{CN}{CD-CN} = \frac{CE}{CF-CE}$ или $\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MB}$. □

Задача 2.2. Постройте изображение в параллельной проекции выпуклого пятиугольника $A_0B_0C_0D_0E_0$ (рис. 20).

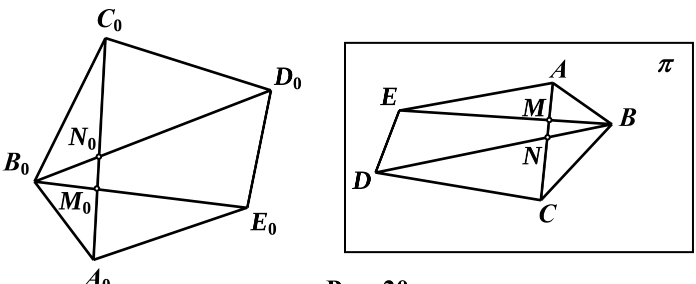


Рис. 20

Решение. Изображением треугольника $A_0B_0C_0$ является произвольный треугольник ABC. В пятиугольнике $A_0B_0C_0D_0E_0$ проведем диагонали A_0C_0, B_0D_0, B_0E_0. Пусть $A_0C_0 \cap B_0D_0 = N_0$, $A_0C_0 \cap B_0E_0 = M_0$. Способом, рассмотренным в задаче 2.1, построим на отрезке AC точки N и M такие, что $\frac{AN}{NC} = \frac{A_0N_0}{N_0C_0}$, $\frac{AM}{MC} = \frac{A_0M_0}{M_0C_0}$. Проводим лучи BN и BM. На луче BN строим точку D, а на луче BM точку E так, что $\frac{BN}{ND} = \frac{B_0N_0}{N_0D_0}$, $\frac{BM}{ME} = \frac{B_0M_0}{M_0E_0}$. Соединяем отрезками точки A и E, E и D, D и C. Пятиугольник $ABCDE$ – изображение пятиугольника $A_0B_0C_0D_0E_0$. □

Использование свойств некоторых многоугольников, например правильных, позволяет упростить процесс построения их изображений.

Задача 2.3. Постройте изображение правильного шестиугольника.

Решение. Центр O_0 правильного шестиугольника $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ является серединой его диагоналей A_0D_0, B_0E_0 и C_0F_0, а четырехугольник $A_0B_0C_0O_0$ является ромбом (рис. 21). За изображение этого ромба можно принять любой параллелограмм $ABCO$. Вершина O параллелограмма $ABCO$ будет серединой диагоналей AD, BE и CF шестиугольника-изображения. □

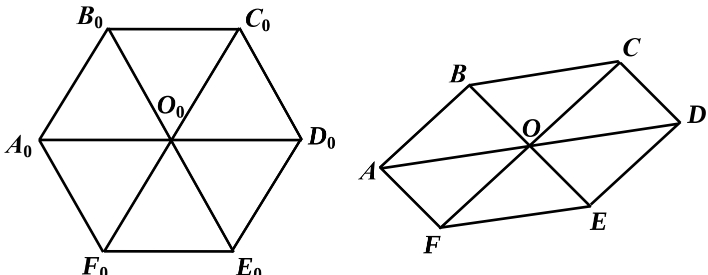


Рис. 21

Примечание. При выполнении таких изображений на практике оригинал можно не строить. Здесь он давался лишь для объяснения способа построения изображения.

Задача 2.4. Постройте изображение правильного пятиугольника.

Решение. Задачу можно решить способом, использованным в задаче 2.2. Однако построение изображения правильного пятиугольника приходится проводить гораздо чаще, чем пятиугольников общего вида. Поэтому рассмотрим более простой и обычно используемый на практике способ его изображения.

Рассмотрим окружность, описанную около правильного пятиугольника $A_0B_0C_0D_0E_0$ (рис. 22). Вписанные в эту окружность углы $A_0B_0E_0$, $B_0A_0C_0$ и $A_0E_0B_0$ опираются на равные дуги и, следовательно, равны между собой. Поэтому треугольники $B_0A_0E_0$, $A_0M_0B_0$, где $M_0 = A_0C_0 \cap B_0E_0$, являются равнобедренными и подобными. Нетрудно также заметить, что диагонали A_0C_0, B_0E_0 пятиугольника параллельны соответственно его сторонам D_0E_0, C_0D_0. Откуда следует, что четырехугольник $C_0D_0E_0M_0$ является ромбом.

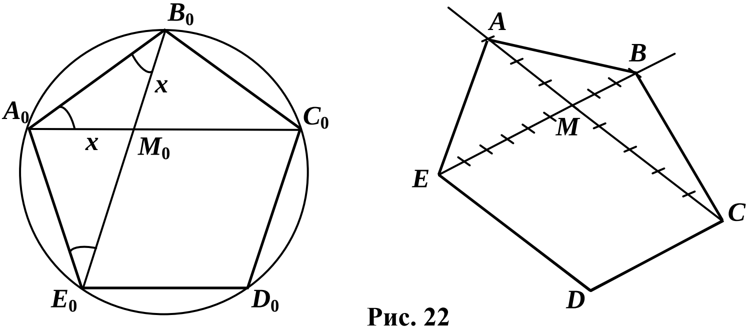


Рис. 22

Пусть сторона пятиугольника равна a, а боковая сторона треугольника $A_0M_0B_0$ – x. Тогда из подобных треугольников $B_0A_0E_0$ и $A_0M_0B_0$ имеем: $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$ или $x^2 + ax - a^2 = 0$. Учитывая, что $x > 0$, отсюда находим $x = \frac{-a+a\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, $\frac{AM}{MC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62 \approx \frac{3}{5}$.

Найденное отношение, в котором диагонали правильного пятиугольника делят друг друга, позволяет быстро и достаточно точно строить изображение этого пятиугольника. Это, например, можно сделать так:

1) строим параллелограмм $CDEM$ – изображение ромба $C_0D_0E_0M_0$;

2) делим сторону MC параллелограмма на пять равных частей;

3) три такие же части откладываем на продолжении MC за точку M, получаем изображение A вершины A_0;

4) аналогичным построением находим точку B – изображение вершины B_0;

5) строим отрезки $AB,\ BC$ и AE. □

2.3. *Изображение тетраэдра.* При изображении плоских многоугольников основополагающую роль играет изображение треугольника. Можно ожидать, что аналогичную роль при изображении многогранников будет выполнять изображение тетраэдра. Как следует из теоремы Польке – Шварца, которую мы сейчас рассмотрим, это действительно так. Названную теорему в 1864 г. доказал немецкий геометр Карл Шварц, а ранее в 1853 г. ее частный случай рассмотрел Польке, учитель Шварца, профессор строительной академии в Берлине.

Теорема 3 (Польке – Шварца). *Изображением данного тетраэдра является всякий четырехугольник вместе с его диагоналями.*

Доказательство. Пусть $A_0B_0C_0D_0$ – тетраэдр-оригинал и $ABCD$ – произвольный четырехугольник, E – точка пересечения его диагоналей (рис. 23).

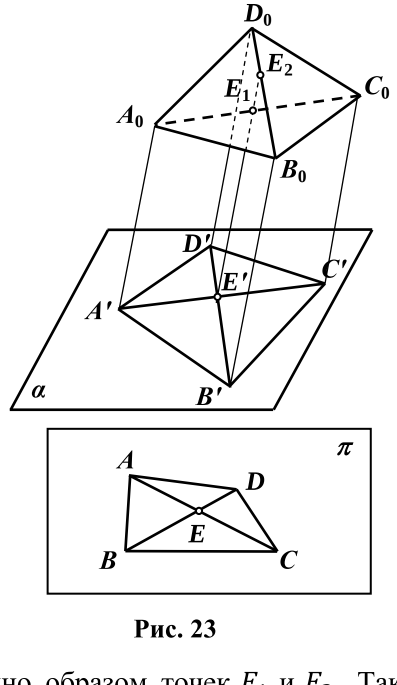


Рис. 23

На противоположных ребрах A_0C_0, B_0D_0 тетраэдра возьмем соответственно точки E_1, E_2 такие, что

$$\frac{A_0E_1}{E_1C_0} = \frac{AE}{EC}, \frac{B_0E_2}{E_2D_0} = \frac{BE}{ED}.$$

Направление прямой E_1E_2 примем за направление проектирования. Выберем некоторую плоскость α, не параллельную прямой E_1E_2, и спроектируем на нее тетраэдр $A_0B_0C_0D_0$. Его проекцией будет четырехугольник $A'B'C'D'$, точка E' пересечения диагоналей которого будет одновременно образом точек E_1 и E_2. Так как при параллельном проектировании сохраняется отношение трех точек, то

$$\frac{A_0E_1}{E_1C_0} = \frac{A'E'}{E'C'} = \frac{AE}{EC}, \frac{B_0E_2}{E_2D_0} = \frac{B'E'}{E'D'} = \frac{BE}{ED}.$$

Таким образом, четырехугольник $A'B'C'D'$, являющийся проекцией тетраэдра, и четырехугольник $ABCD$ удовлетворяют следствию теоремы 2. Поэтому четырехугольник $ABCD$ может служить изображением четырехугольника $A'B'C'D'$, а значит, и изображением данного тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$. □

Заметим, что четырехугольник, о котором идет речь в формулировке теоремы, не обязательно является выпуклым. Так, на рисунке 24 четырехугольник $ABCD$ – выпуклый, а на рисунках 25, 26 – невыпуклый. (Для большей наглядности на этих рисунках невидимые с точки зрения наблюдателя ребра изображены пунктирными линиями.)

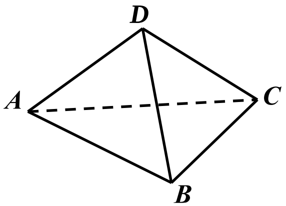


Рис. 24

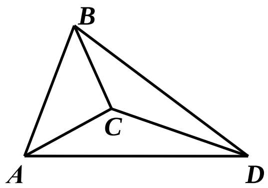


Рис. 25

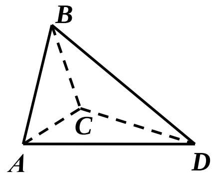


Рис. 26

Заботясь о наглядности, при выполнении изображений тетраэдра часто приходится учитывать его вид.

Рассмотрим, например, изображение правильной треугольной пирамиды. Основание высоты, опущенной из вершины такой пирамиды, совпадает с центром правильного треугольника, лежащего в основании. Поэтому изображение правильной пирамиды и ее высоты может быть таким, каким дано на рисунке 27. Однако изображение в этом случае не является наглядным. Дело в том, что наш опыт зрительного восприятия окружающих предметов основан на том, что, как правило, эти предметы установлены на горизонтальной плоскости, а плоскость изображения параллельна линии тела, т. е. является вертикальной. Ясно, что при этом вертикальные отрезки проектируются на плоскость изображений в вертикальные. В школьной практике мы также обычно предполагаем, что геометрические тела расположены на горизонтальной плоскости, а плоскость чертежа принимаем за вертикальную. Поэтому на чертеже высоту правильной пирамиды изображают вертикальным отрезком (рис. 28). Такое изображение правильной треугольной пирамиды, естественно, будет более наглядным.

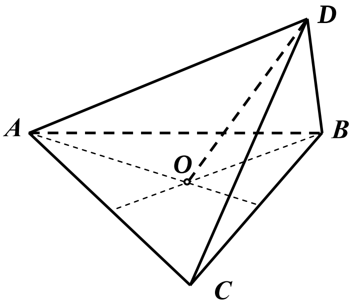


Рис. 27

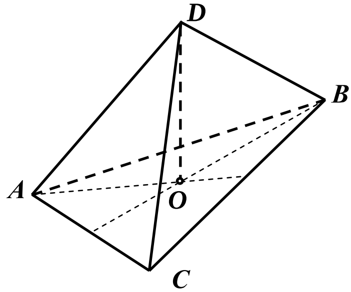


Рис. 28

Аналогичная ситуация возникает при изображении тетраэдра, у которого одно из ребер перпендикулярно основанию. Любой из четырехугольников на рисунках 24, 25 является изображением этого тетраэдра, но более наглядными будут изображения на рисунке 29.

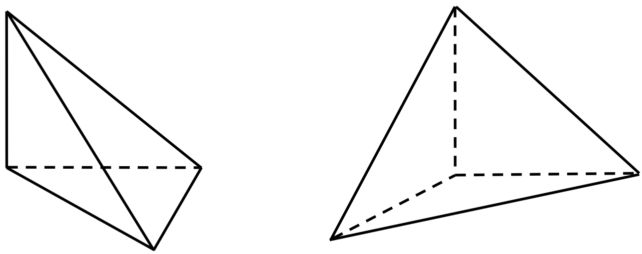


Рис. 29

Теорема 4. *Если дано изображение тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$, то можно построить изображение любой точки пространства.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ – изображение тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$ и M_0 – произвольная точка пространства (рис. 30). Если через точку M_0 и вершины тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$ провести прямые, то хотя бы одна из них пересечет плоскость грани, противоположной соответствующей вершине. Пусть, например, прямая A_0M_0 пересекает плоскость грани $B_0C_0D_0$ в точке E_0. В свою очередь, хотя бы одна из прямых, проведенных через вершины треугольника $B_0C_0D_0$ и точку E_0, пересечет прямую, содержащую соответствующую противоположную сторону этого треугольника. Пусть, например, прямая B_0M_0 пересекает прямую C_0D_0 в точке F_0.

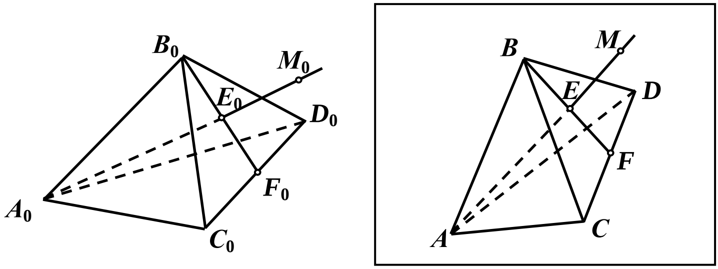


Рис. 30

Поскольку при параллельном проектировании и подобии сохраняется отношение трех точек прямой, то изображение E точки E_0 можно построить. В самом деле, если точка F_0 делит отрезок C_0D_0 в отношении (C_0D_0, F_0), то точка F делит отрезок CD в том же отношении: $(CD, F) = (C_0D_0, F_0)$. Так же точно точка E делит отрезок BF в том же отношении, в каком делит отрезок B_0F_0 точка E_0: $(BF, E) = (B_0F_0, E_0)$. Точка M должна лежать на прямой AE, а ее положение на этой прямой определяется отношением: $(AE, M) = (A_0E_0, M_0)$. Тремя найденными равенствами точка M однозначно определяется. □

На основании теорем 3, 4 можно дать следующие правила построения изображений пирамиды и призмы.

2.4. Изображение пирамиды. Изображением произвольной n-угольной пирамиды является фигура, состоящая из n-угольника, изображающего основание пирамиды, и n треугольников с общей вершиной, изображающих ее боковые грани.

При построении изображений пирамид заданной формы дополнительно приходится использовать правила изображения плоских многоугольников, лежащих в основании.

Рассмотрим в качестве примера изображение правильной шестиугольной пирамиды и ее высоты. В основании этой пирамиды лежит правильный шестиугольник. Его изображение было рассмотрено в пункте 2.2. Высота правильной пирамиды перпендикулярна ее основанию, а основание высоты совпадает с центром правильного многоугольника, лежащего в основании.

Поэтому высоту пирамиды изображаем, как условились, вертикальным отрезком OS (рис. 31). Отрезки, соединяющие точку S с вершинами шестиугольника, будут изображать боковые ребра пирамиды.

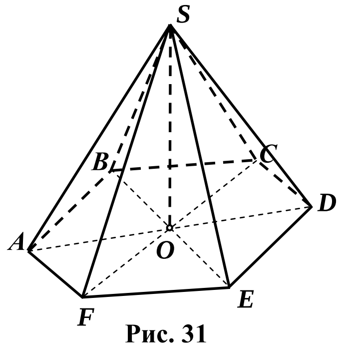


Рис. 31

По теореме 3 четырехугольник $OABS$ вместе с его диагоналями будут изображением тетраэдра, вершинами которого служат вершина пирамиды, две смежные вершины основания и его центр. Поскольку остальные вершины основания строились с учетом правил изображения плоских многоугольников, то построенная фигура действительно является изображением правильной шестиугольной пирамиды и ее высоты.

2.5. *Изображение параллелепипеда.* Изображением параллелепипеда, в частности прямоугольного параллелепипеда и куба, является фигура, состоящая из трех пар попарно равных параллелограммов. При этом в каждой паре один параллелограмм получается из другого параллельным переносом.

В параллелепипеде-оригинале $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ вершины A_0, B_0, C_0 и A_0' являются вершинами тетраэдра (рис. 32). По теореме Польке – Шварца изображением вершин этого тетраэдра служат вершины произвольного четырехугольника $ABCC'$. Изображения остальных вершин параллелепипеда строятся с учетом того, что изображениями его противоположных граней будут попарно равные параллелограммы.

Как было отмечено, фигура на рисунке 32 может служить и изображением произвольного параллелепипеда, и изображением прямоугольного параллелепипеда (в частности, куба). Догадаться по такому изображению о том, что на нем изображен прямоугольный параллелепипед, невозможно, и, кроме того, такое изображение не соответствует нашему зрительному опыту. Так как боковые ребра прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны его основаниям, то нам более привычно видеть их изображения в виде вертикальных отрезков. Более того, если плоскость изображения выбрать параллельной некоторой паре противоположных граней параллелепипеда, то проекции выбранных граней будут равны самим граням.

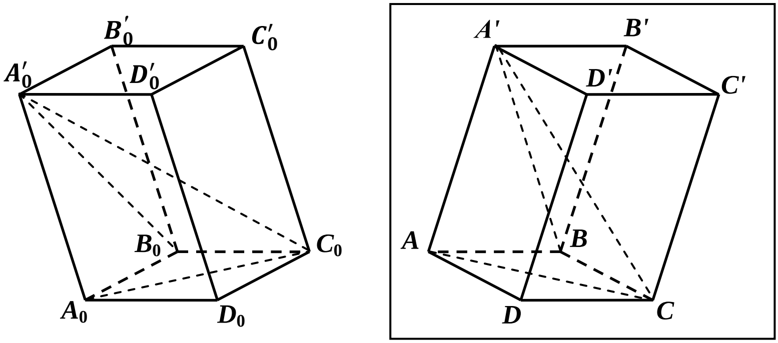


Рис. 32

Такие проекции прямоугольного параллелепипеда и куба даны на рисунке 33. Фигуры на этих рисунках, а также фигуры, подобные им, будем изображать, когда необходимо построить изображения прямоугольного параллелепипеда и куба.

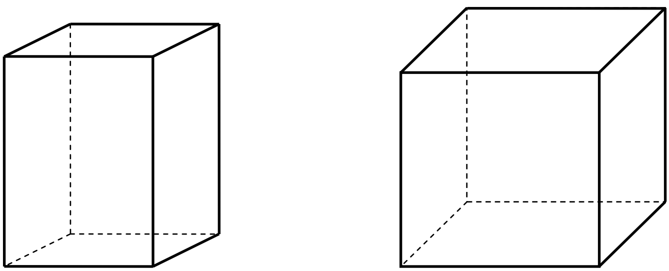


Рис. 33

2.6. ***Изображение призмы.*** Изображением n-угольной призмы является фигура, состоящая из двух равных n-угольников, один из которых получается параллельным переносом из другого, и n параллелограммов. При этом стороны этих параллелограммов, соединяющие соответствующие вершины n-угольников, параллельны (рис. 34, $n = 5$).

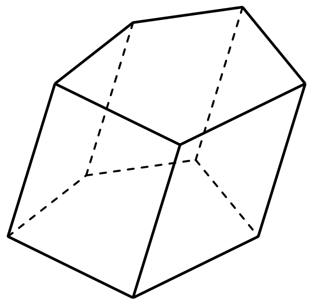


Рис. 34

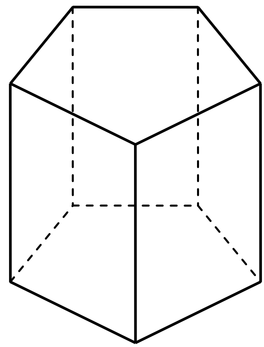


Рис. 35

При изображении прямой призмы естественно вновь отрезки, изображающие боковые ребра, выбрать вертикальными (рис. 35, $n = 5$).

Задачи и упражнения

1. Может ли данный треугольник быть одновременно изображением правильного треугольника и изображением прямоугольного равнобедренного треугольника?

2. Может ли квадрат быть изображением: а) трапеции, б) ромба, в) произвольного параллелограмма?

3. Постройте изображение трапеции, нижнее основание и боковые стороны которой вдвое больше верхнего основания.

4. Докажите, что изображением данной трапеции является любая трапеция, основания которой пропорциональны основаниям данной.

5. Предложите способы построения изображения правильного шестиугольника, отличные от способа, рассмотренного в пункте 2.2.

6. Постройте изображение правильного восьмиугольника.

7. Постройте изображение правильной n-угольной пирамиды для $n = 3, 4, 5$.

8. Постройте изображение правильной n-угольной призмы для $n = 3, 4, 5, 6$.

9. Основанием четырехугольной пирамиды является трапеция, одно основание которой вдвое больше другого. Постройте изображение этой пирамиды.

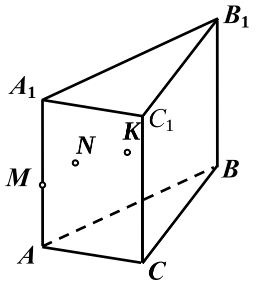
10. Обоснуйте построение изображения n-угольной усеченной пирамиды.

11. Постройте изображение правильной четырехугольной усеченной пирамиды.

§ 3. Сечение многогранника плоскостью

3.1. *Понятие позиционной задачи.* Напомним, что плоскость называется *секущей плоскостью* многогранника, если по обе стороны от этой плоскости имеются точки данного многогранника. *Сечением многогранника* плоскостью называется многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

На рисунке 36 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. (На этом проекционном чертеже изображения точек обозначены теми же буквами, что и соответствующие точки-оригиналы.) Представим, что нам необходимо отметить точки: а) M, лежащую на ребре AA_1; б) N, лежащую в грани ABB_1A_1; в) K, лежащую внутри призмы.



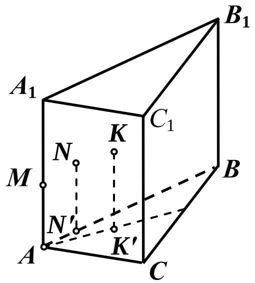


Рис. 36

Если мы изобразим эти точки так, как это сделано на левом рисунке, то лишь про точку M можно условно сказать, что она лежит на ребре AA_1. Положение точек N и K по этому рисунку определить нельзя. Правый рисунок уже позволяет заключить, что точка N лежит в грани ABB_1A_1, а точка K – внутри призмы.

На каком основании можно сделать эти выводы? Дело в том, что на правом рисунке заданы проекции точек N и K на плоскость основания параллельно боковым ребрам призмы. Строго говоря, для того чтобы быть уверенным, что и точка M лежит на ребре AA_1, одних зрительных восприятий также недостаточно. (В проектировании, с помощью которого выполнялось изображение призмы, точка M служит проекцией любой точки прямой, параллельной направлению проектирования и через нее проходящей.) Если же указать, что при проектировании, параллельном боковым ребрам призмы, точка M проектируется на основание в точку A, то такая уверенность появляется.

Аналогичная ситуация показана на рисунке 37. Здесь нужно отметить точки: а) M на боковом ребре SA; б) N – в грани SAB; в) K – внутри пирамиды. Разница заключается в том, что на правом рисунке используется центральное проектирование отмечаемых точек на плоскость основания пирамиды из ее вершины S.

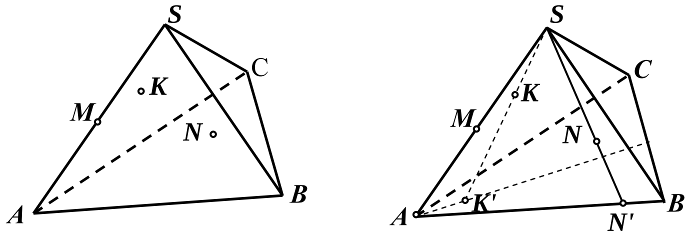


Рис. 37

Таким образом, для того чтобы в рассмотренных примерах сделать изображение наглядным, использовалось не одно проектирование, а два. Первое проектирование, с помощью которого выполнено изображение многогранника, называется *внешним.* Второе проектирование носит вспомогательный характер. Оно связано с самой фигурой, – это, как правило, проектирование на плоскость, содержащую одну из граней многогранника. Мы будем иметь дело только с призмами и пирамидами, а в качестве такой плоскости чаще всего выбирать плоскость их основания. Вспомогательное проектирование называется *внутренним.* Из приведенных примеров видно, что для призмы удобно использовать внутреннее параллельное проектирование, а для пирамиды – центральное.

Пусть F_0 – некоторая фигура в пространстве, которая параллельно проектируется на плоскость π (внешнее проектирование). Для того чтобы изображение фигуры было наглядным, мы выбираем в пространстве некоторую плоскость π'_0, отличную от плоскости π, и рассматриваем новое проектирование, параллельное или центральное, точек фигуры F_0 на эту плоскость (внутреннее проектирование).

Рассмотрим в пространстве точку M_0 и ее проекцию M'_0 на плоскость π'_0 при внутреннем проектировании. Обе эти точки спроектируем на плоскость π. При этом проекция M точки M_0 называется *основной* (или просто проекцией), а проекция M' точки M'_0 – *вторичной.*

Если для точки M_0 фигуры F_0 известны ее проекция M и вторичная проекция M', то по изображению мы можем судить о положении этой точки на оригинале. В этом случае говорят, что точка M_0, принадлежащая фигуре F_0, является *заданной* на проекционном чертеже. Изображение фигуры F_0, на котором каждая точка фигуры является заданной, называется *полным.*

На проекционных чертежах часто приходится решать задачи о нахождении пересечения различных фигур. Такие задачи называются *позиционными.* Если некоторое изображение является полным, то на этом изображении разрешима любая позиционная задача.

В заключение заметим следующее. Если M'_0, N'_0, K'_0, ... – образы точек M_0, N_0, K_0, ... при внутреннем параллельном проектировании, то при внешнем проектировании (параллельном) образы MM', NN', KK', ... параллельных прямых $M_0M'_0$, $N_0N'_0$, $K_0K'_0$, ... на плоскости π также будут параллельными. Если же M'_0, N'_0, K'_0, ... – образы точек M_0, N_0, K_0, ... при внутреннем центральном проектировании с центром S_0, то образы MM', NN', KK', ... прямых $M_0M'_0$, $N_0N'_0$, $K_0K'_0$, ... при внешнем проектировании пересекаются на плоскости π в одной точке S. Эта точка будет образом точки S_0.

Среди позиционных задач нас будут интересовать только задачи, связанные с построением сечений многоугольников. Рассмотрим основные методы построения таких сечений.

Обычно при решении школьных стереометрических задач изображения точек фигуры на проекционном чертеже обозначают теми же буквами, что и соответствующие им точки на фигуре-оригинале. Будем в дальнейшем также придерживаться этого правила.

3.2. ***Построения сечений, основанные на свойствах параллельных прямых и плоскостей.*** Данный способ наиболее часто применяется при построении сечений параллелепипедов, при этом используется теорема о пересечении параллельных плоскостей третьей плоскостью (секущая плоскость пересекает противоположные грани параллелепипеда по параллельным отрезкам). Мы же в качестве примера рассмотрим задачу, в которой используется признак параллельности прямой и плоскости.

Задача 3.1. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K, лежащую на боковом ребре AS, параллельно диагонали BD основания.

Решение. В плоскости основания пирамиды проведем произвольную прямую a, параллельную диагонали BD. Через прямую a и точку K проходит плоскость α, и притом единственная. По построению $BD \| a$, поэтому по признаку параллельности прямой и плоскости $BD \| \alpha$ и плоскость α является искомой.

В плоскости основания существует бесконечно много прямых, параллельных прямой BD, поэтому существует бесконечно много плоскостей, удовлетворяющих условию задачи. Различные возможные случаи расположения прямой a относительно параллелограмма $ABCD$ показаны на рисунке 38.

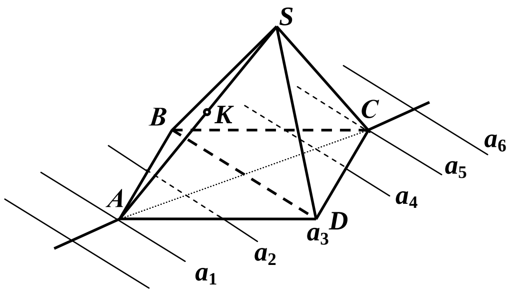


Рис. 38

Так как четырехугольная пирамида имеет пять граней, то в ее сечении плоскостью α могут получаться треугольники, четырехугольники и пятиугольники.

Слева на рисунке 39 рассмотрен случай, когда прямая a_1 пересекает стороны AD, AB в точках M, N соответственно и лежит с точкой K в одном полупространстве с границей BSD. Здесь сечением является треугольник MKN.

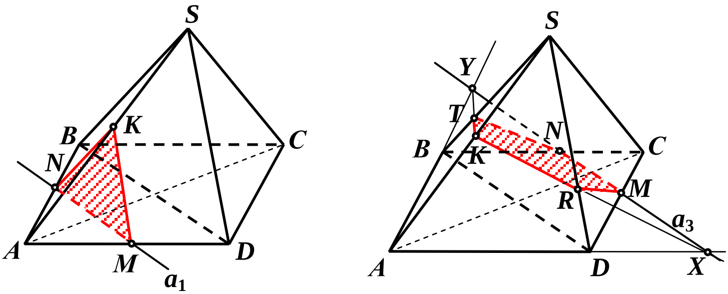


Рис. 39

На правом рисунке показан случай, когда прямая a_3 лежит с точкой K по разные стороны от плоскости BSD и пересекает стороны DC, BC основания в точках M, N соответственно. Обозначим через X точку пересечения прямых AD и a_3. Так как прямая AD лежит в плоскости грани ASD, то в плоскости этой грани лежит и точка X. С другой стороны, точка X принадлежит прямой a_3, лежащей в секущей плоскости. Поэтому прямая KX будет линией пересечения секущей плоскости и плоскости грани ASD. Это позволяет найти точку $R = SD \cap KX$. Аналогично с помощью точки $Y = AB \cap a_3$ строится вершина $T \in BS$ искомого сечения. В рассмотренном случае секущая плоскость пересекает все грани пирамиды и сечение является пятиугольником.

Остальные случаи взаимного расположения прямой a и параллелограмма, лежащего в основании пирамиды, рассмотрите самостоятельно. □

Перейдем к специальным методам построения сечений.

3.3. *Метод следов.* Прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани многогранника, называется *следом секущей плоскости* на плоскости этой грани.

При построении сечений многогранников методом следов первоначально строятся следы секущей плоскости на его гранях. Для построения сечений призм и усеченных пирамид обычно используются следы секущей плоскости на плоскости нижнего основания, а при построении сечений пирамид – на плоскости ее основания.

Задача 3.2. Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Задать три точки, принадлежащие ее различным боковым граням, и построить сечение, проходящее через эти три точки.

Решение. Напомним, что для задания точки на проекционном чертеже необходимо задать ее основную и вторичную проекции. В случае призмы для задания вторичных проекций мы договорились использовать внутреннее параллельное проектирование. Поэтому, чтобы задать точку M, лежащую в грани ABB_1A_1, указываем ее проекцию M_1 на плоскость основания параллельно боковым ребрам призмы. Аналогично задаются точки N и K, лежащие в гранях ADD_1A_1, CDD_1C_1 соответственно (рис. 40). Построим след секущей плоскости на плоскости нижнего основания призмы. Параллельные прямые MM_1, KK_1 лежат в одной плоскости, и, значит, в общем случае прямые MK, M_1K_1 пересекаются в некоторой точке X. Так как прямая MK лежит в секущей плоскости, а прямая M_1K_1 – в плоскости нижнего основания, то точка X принадлежит следу секущей плоскости на плоскости нижнего основания призмы. Аналогично, используя точки K, N и их вторичные проекции K_1, N_1 строим вторую точку Y, принадлежащую искомому следу.

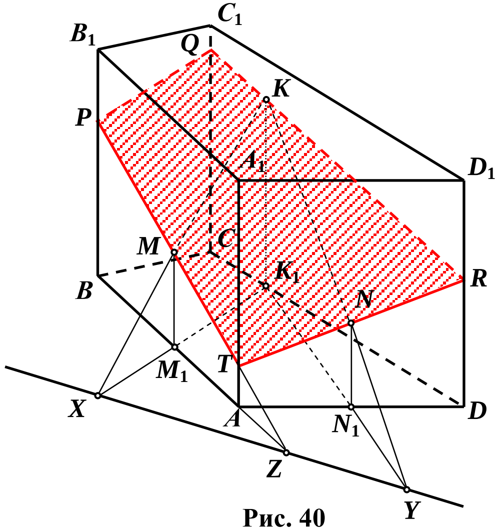


Рис. 40

Прямая AB, лежащая в грани ABB_1A_1, пересекает след XY в точке Z, поэтому прямая MZ лежит как в плоскости грани ABB_1A_1, так и в секущей плоскости. Отрезок TP, где $T = MZ \cap AA_1$, $P = MZ \cap BB_1$, будет стороной многоугольника-сечения. Далее последовательно строим его стороны TR и RQ, проходящие через данные точки N и K соответственно. Наконец, строим сторону PQ. □

Задача 3.3. Дано изображение пятиугольной пирамиды $SABCDE$. Задать точки N и K, принадлежащие боковым ребрам SC, SD соответственно и точку M, лежащую в грани ASE. Построить сечение, проходящее через выбранные точки.

Решение. Для задания точек K, N и M воспользуемся внутренним центральным проектированием с центром в вершине S пирамиды. При этом проекциями точек K и N будут точки D и C, а проекцией точки M – точка M_1, лежащая на ребре AE (рис. 41).

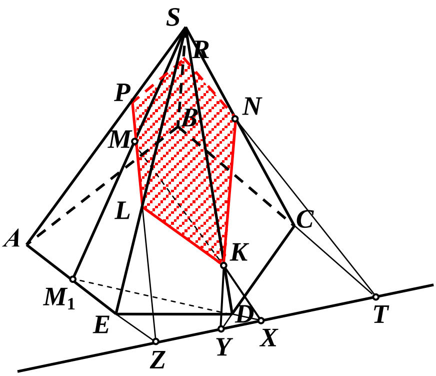


Рис. 41

Прямые MK и M_1D, лежащие в плоскости M_1SD, в общем случае пересекаются в точке X, лежащей в секущей плоскости. С другой стороны, точка X лежит в плоскости основания, и, значит, она принадлежит следу секущей плоскости на плоскости основания. Второй точкой искомого следа будет точка $Y = KN \cap CD$. Прямая AE, лежащая в грани ASE пирамиды, пересекает след XY в точке Z. Проводя прямую ZM, находим сторону LP многоугольника-сечения. Для того чтобы найти вершину R сечения, строим точку $T = BC \cap XY$, а затем прямую TN. □

3.4. *Метод внутреннего проектирования.* В основе метода внутреннего проектирования лежит построение точек искомого сечения по их вторичным проекциям. Этот метод удобно применять в тех случаях, когда след секущей плоскости далеко удален от заданной фигуры. В частности, он незаменим тогда, когда некоторые из прямых, содержащих стороны основания многогранника, пересекают след за пределами чертежа. Рассмотрим применение метода на примерах.

Задача 3.4. Дано изображение шестиугольной призмы и трех точек, лежащих в трех боковых гранях, никакие две из которых не являются смежными. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через заданные точки.

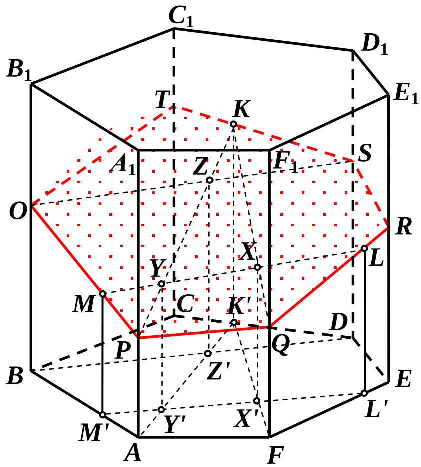


Рис. 42

Решение. Пусть заданные точки M, L, K лежат в гранях ABB_1A_1, EFF_1E_1, CDD_1C_1, а M', L', K' – их вторичные проекции (рис. 42).

Найдем точку, в которой секущая плоскость пересекает боковое ребро FF_1. Для этого с помощью внутреннего проектирования для точки $X' = M'L' \cap K'F$ найдем основную проекцию X, лежащую в секущей плоскости. Искомая точка X является точкой пересечения прямой, проходящей через точку X' параллельно боковым ребрам призмы, и прямой ML, лежащей в секущей плоскости. Используя точку X, строим вершину $Q = KX \cap FF_1$, а затем сторону QR сечения. Аналогично, используя точку $Y' = M'L' \cap K'A$, строим точку Y, прямую KY и находим вершину P сечения. Далее строятся стороны PQ и PO сечения.

Оставшиеся построения выполняем в следующей последовательности:

1) строим точку $Z' = AK' \cap BD$;

2) находим точку Z ($Z \in PK$);

3) проводим прямую OZ и находим вершину S ($S \in DD_1$) сечения;

4) последовательно строим стороны SR, ST и TO сечения. □

Задача 3.5. Дано изображение четырехугольной пирамиды и трех точек, лежащих на ее боковых ребрах. Построить сечение, проходящее через заданные точки.

Решение. Пусть $SABCD$ – данная пирамида, а M, N, K – данные точки (рис. 43). Вторичными проекциями точек M, N, K во внутреннем центральном проектировании из вершины S на плоскость основания являются точки A, C и D соответственно. Заметим, что в данной задаче стороны MK и KN сечения сразу строятся. Остается найти только вершину сечения L, лежащую на боковом ребре SB. Для этого построим точку $X' = AC \cap BD$ и «поднимем» ее в секущую плоскость с помощью внутреннего проектирования. Прообразом точки X' при этом центральном проектировании будет точка $X = X'S \cap MN$. Вершина L, принадлежащая ребру SB, лежит на прямой KX. □

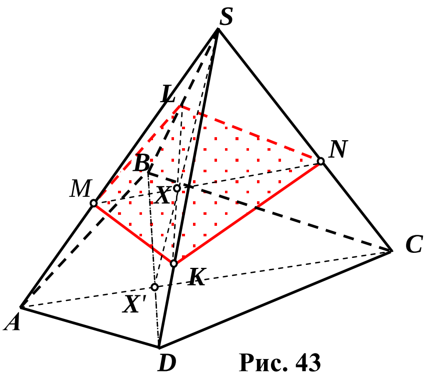


Рис. 43

3.5. *Комбинированный метод*. При построении изображений сечений комбинированным методом часть построений выполняется на основании свойств параллельных прямых и плоскостей, а часть с помощью метода следов или метода внутреннего проектирования. Наиболее часто такие сочетания используются при построении сечений многогранников, имеющих параллельные грани, при этом используется теорема о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Задача 3.6. Построить сечение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через вершину A, точку F_2, делящую ребро FF_1 в отношении $1:2$, считая от точки F, и точку C_2, делящую ребро CC_1 в отношении $1:3$, считая от точки C.

Решение. Сторона AF_2 сечения строится сразу. Поскольку противоположные боковые грани AA_1F_1F, CC_1D_1D правильной шестиугольной пирамиды параллельны, то секущая плоскость будет пересекать плоскость грани CC_1D_1D по прямой C_2D_2, параллельной прямой AF_2 (рис. 44).

Продолжим построение сечения методом внутреннего проектирования. Точка M пересечения диагоналей AC и BE шестиугольника $ABCDEF$ является вторичной проекцией точки M_2 прямой F_2D_2, расположенной в плоскости сечения, при внутреннем проектировании, параллельном боковым ребрам призмы. Так же точно точка N пересечения диагоналей FD и BE является вторичной проекцией точки N_2 прямой AC_2, лежащей в секущей плоскости. Прямая M_2N_2, которая одновременно лежит в секущей плоскости и плоскости BB_1E_1E, пересекает ребро EE_1 в точке E_2, а диагональ основания BE в точке L. Проводя прямую AL, находим точку K, в которой секущая плоскость пересекает ребро BC. $AKC_2D_2E_2F_2$ – искомое сечение. □

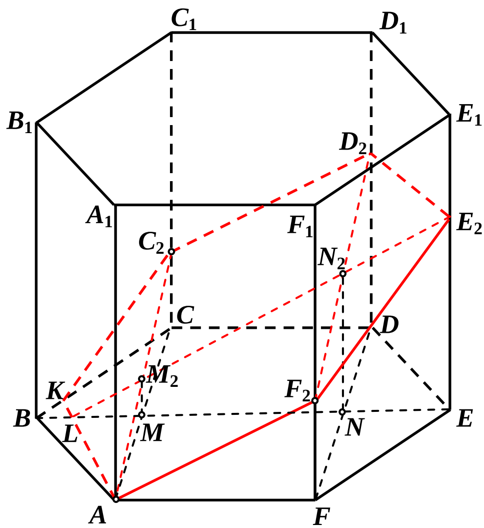


Рис. 44

В следующей задаче используется теорема о плоскости, проходящей через прямую, параллельную другой плоскости.

Задача 3.7. Точка M является серединой ребра AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точку M параллельно диагонали BD нижнего основания и диагонали AB_1 боковой грани AA_1B_1B.

Решение. Секущая плоскость α параллельна диагонали BD основания $ABCD$ и проходит через точку M, лежащую в плоскости этого основания, поэтому она пересекает основание по прямой $l \| BD$ (рис. 45).

Прямая l является следом плоскости α на плоскости нижнего основания куба. Обозначим $N = l \cap AB$. След m плоскости α на плоскости грани ABB_1A_1 строится аналогично. Этот след проходит через точку N, параллельно AB_1. Обозначим $K = m \cap BB_1$.

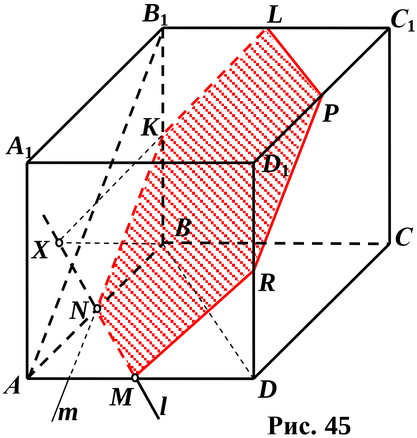


Рис. 45

Можно продолжить построение сечения, не прибегая к специальным методам. Однако мы воспользуемся методом следов. Пусть прямая BC пересекает след l в точке X. Точки X и K искомой плоскости α лежат и в плоскости грани BCC_1B_1. Обозначим через L точку пересечения прямой XK и ребра B_1C_1. Далее удобно воспользоваться теоремой о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. В силу этой теоремы $MR \| KL$, $LP \| NM$, где $R \in DD_1$, $P \in C_1D_1$. □

Докажите, что полученный в сечении шестиугольник является правильным.

3.6. ***Изображение линий пересечения двух многогранников.*** Для построения фигуры, которая получается при пересечении двух многогранников, изображаются сечения одного из многогранников гранями другого многогранника.

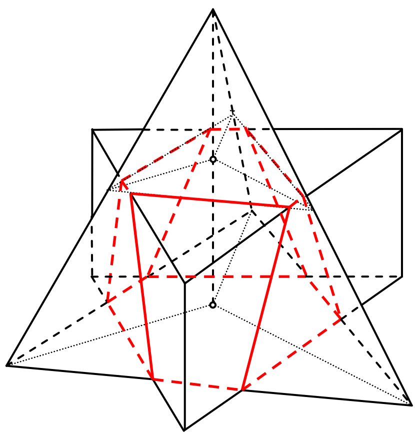


Рис. 46

На рисунке 46 комбинированным методом построено изображение пересечения треугольной пирамиды и треугольной призмы, боковые ребра которой параллельны высоте пирамиды. (Призма и пирамида стоят на одной горизонтальной плоскости, высота призмы равна половине высоты пирамиды.)

Задачи и упражнения

1. Точки K, L и M лежат на разных боковых ребрах параллелепипеда. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через эти точки.

2. Плоскость α вращается вокруг диагонали грани куба. Какие многоугольники получаются в сечении куба плоскостью α? Ответ проиллюстрируйте соответствующими чертежами.

3. Перечислите все виды четырехугольников, которые могут получиться при пересечении куба плоскостью? Для каждого вида сечения выполните соответствующий чертеж.

4. Постройте сечение шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через ребро нижнего основания и точку, лежащую:

а) на не смежном с ним боковом ребре призмы,

б) в плоскости верхнего основания призмы.

5. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей:

а) через три точки, лежащие на боковых ребрах;

б) точку, лежащую на ребре основания, и две точки, лежащие на боковых ребрах, не примыкающих к этому ребру основания;

в) ребро основания и точку бокового ребра, не примыкающего к этому ребру основания;

г) ребро основания и середину высоты пирамиды;

д) диагональ основания AC параллельно ребру SB;

е) середину высоты пирамиды параллельно боковому ребру SA и ребру основания CD;

ж) середину высоты пирамиды параллельно плоскости BED, где точка E принадлежит ребру SA и делит его в отношении $2:1$, считая от вершины S.

6. Дано изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте параллельные сечения куба плоскостями, одна из которых проходит через диагональ AC грани $ABCD$, а вторая – :

а) через диагональ A_1D грани AA_1D_1D;

б) середины ребер CD и A_1B_1;

в) центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и CC_1D_1D.

7. Дано изображение тетраэдра. Постройте параллельные сечения этого тетраэдра плоскостями, проходящими:

а) через скрещивающиеся средние линии двух граней;

б) скрещивающиеся медианы двух граней;

в) среднюю линию одной грани и скрещивающуюся с ней медиану другой грани.

8. Основание четырехугольной пирамиды отлично от параллелограмма и трапеции. Постройте изображение этой пирамиды и ее сечения плоскостью, которое является параллелограммом.

9. Дано изображение треугольной пирамиды. Укажите, как построить сечение этой пирамиды плоскостью, которое является ромбом.

10. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а остальные – в плоскости ее основания. Постройте изображение этой комбинации многогранников и найдите ребро куба, если боковое ребро пирамиды равно a, а ее высота – H.

11. Основание $ABCD$ правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и основание KLM правильной треугольной пирамиды $SKLM$ вписаны в одну и ту же окружность так, что $KL \| AB$. Изобразите пересечение призмы и пирамиды, если высота призмы равна половине высоты пирамиды.

§ 4. Изображение окружности

4.1. ***Сжатие плоскости к прямой.*** При построении изображений цилиндра, конуса, шара (сферы) и их сечений приходится вычерчивать эллипсы. Эллипс можно определить различными способами. Мы для его определения используем преобразование сжатия плоскости к прямой.

Прежде чем ввести это преобразование и рассмотреть некоторые его свойства, заметим следующее. В школьном курсе планиметрии рассматриваются только движения и подобия плоскости. Всякое движение плоскости сохраняет расстояние между любыми двумя ее точками, при подобии для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство

$$A'B' = k\, AB,$$

где число $k > 0$. При движении сохраняются размеры и форма фигуры, при подобии размеры фигуры изменяются, но форма ее сохраняется.

Вместе с тем можно рассматривать и такие преобразования плоскости, при которых меняются и размеры, и форма фигуры. Сжатие плоскости к прямой является простейшим примером такого преобразования. Эллипс можно определить как фигуру, которая получается в результате сжатия окружности к прямой, содержащей ее диаметр.

Пусть l – прямая на плоскости, k – положительное действительное число, отличное от 1, M – произвольная точка плоскости и M_0 – ее ортогональная проекция на прямую l. Поставим в соответствие точке M точку M_1 такую, что

$$\overrightarrow{M_0M_1} = k\overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

Из равенства (1) находим: $\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{M_0M_1}$. Поэтому точка M_1 плоскости имеет один и только один прообраз и, следовательно, построенное соответствие действительно является преобразованием плоскости. Это преобразование называется *сжатием плоскости к прямой* l. Прямая l называется *осью сжатия*, а число $k \neq 1$ – *коэффициентом сжатия*.

Из векторного равенства (1) следует, что $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = k\left|\overrightarrow{M_0M}\right|$ или

$$M_0M_1 = kM_0M.$$

Поэтому при сжатии плоскости к прямой l все точки оси l сжатия остаются неподвижными (инвариантными); всякая другая точка M переходит в точку M_1, расположенную на одном с ней перпендикуляре к оси сжатия по ту же сторону от этой оси. При $k < 1$ все точки плоскости приближаются к оси сжатия, при $k > 1$ все точки удаляются от оси сжатия, т. е. фактически имеет место растяжение, а не сжатие (рис. 47).

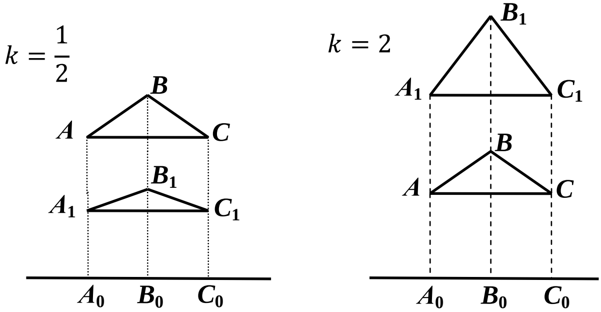


Рис. 47

Найдем формулы, определяющие сжатие плоскости к прямой l с коэффициентом сжатия $k > 0,\ k \neq 1$ в прямоугольной системе координат Oxy. Систему координат выберем так, чтобы ось сжатия l лежала на оси абсцисс Ox (рис. 48).

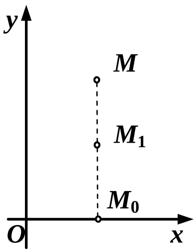


Рис. 48

Пусть в выбранной системе координат произвольная точка M плоскости имеет координаты (x, y), а ее образ M_1 – координаты (x_1, y_1). Так как прямая MM_1 параллельна оси Oy, то $x_1 = x$, и проекция M_0 этих точек на ось сжатия определяется координатами $(x, 0)$. Поэтому из соотношения (1) имеем:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x - x, y_1 - 0) = (0, y_1),$$
$$k\overrightarrow{M_0M} = k(x - x, y - 0) = (0, ky).$$

Отсюда следует, что формулы сжатия имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = ky. \end{cases} \tag{2}$$

Обратно, формулы (2) определяют сжатие плоскости к оси Ox с коэффициентом сжатия k, в котором точка $M(x, y)$ переходит в точку $M_1(x_1, y_1)$.

Рассмотрим свойства введенного преобразования плоскости. *При сжатии плоскости к прямой* l:

1) *прямая* d, *пересекающая ось* l *сжатия в точке* L, *перейдет в прямую* d_1, *также пересекающую ось сжатия в точке* L;

2) *прямая* d, *параллельная оси сжатия, перейдет в прямую* d_1, *параллельную оси сжатия;*

3) *прямая d, перпендикулярная оси сжатия, переходит сама в себя.*

Действительно, пусть в прямоугольной системе координат Oxy, ось абсцисс которой лежит на оси сжатия l, прямая d задана уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Из формул (2) имеем: $x = x_1$, $y = \frac{1}{k}y_1$. Подставляя x и y в уравнение прямой d, найдем уравнение ее образа d_1 при сжатии плоскости к оси l: $ax_1 + \frac{b}{k}y_1 + c = 0$ или

$$ax + \frac{b}{k}y + c = 0.$$

Отсюда следует, что образом прямой при сжатии плоскости является прямая. Если при этом $b = 0$, т. е. прямая d имеет уравнение $ax + c = 0$ и, следовательно, перпендикулярна оси Ox, то она переходит сама в себя.

В системе координат Oxy ось абсцисс Ox имеет уравнение $y = 0$. Поэтому, если $a \neq 0$, то и прямая d, и прямая d_1 пересекают ось Ox в одной и той же точке $L(-\frac{c}{a}, 0)$. Если же $a = 0$, то прямая d имеет уравнение $by + c = 0$ и параллельна оси Ox. Ее образ – прямая d_1 имеет уравнение $\frac{b}{k}y + c = 0$ и также параллельна оси Ox.

Далее, пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ – три произвольные точки, лежащие на одной прямой; $M_1'(x_1, ky_1)$, $M_2'(x_2, ky_2)$ и $M_3'(x_3, ky_3)$ – их образы при сжатии плоскости к оси Ox. Если точка M_3 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, считая от точки M_1, то $x_3 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Переписывая эти соотношения в виде $x_3 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $ky_3 = \frac{ky_1+\lambda ky_2}{1+\lambda}$, заключаем, что точки M_1', M_2', M_3' лежат на одной прямой и точка M_3' также делит отрезок $M_1'M_2'$ в отношении λ, считая от точки M_1. Таким образом,

4) *при сжатии плоскости к прямой сохраняется отношение трех точек прямой.*

Отсюда, в частности, следует, что

5) *при сжатии плоскости к прямой отрезок переходит в отрезок, а середина отрезка – в середину отрезка, являющегося его образом.*

Самостоятельно докажите, что

6) *при сжатии плоскости к прямой параллельные прямые переходят в параллельные*.

Задача 4.1. Докажите, что сжатие плоскости к прямой однозначно задается прямой сжатия и парой соответственных неинвариантных точек.

Решение. Пусть l – ось сжатия, M, M_1 – соответственные неинвариантные точки: $M, M_1 \notin l$, $MM_1 \perp l$. Обозначим $M_0 = MM_1 \cap l$ и $k = \frac{M_0M_1}{M_0M}$. Для решения задачи достаточно указать способ построения образа произвольной точки N плоскости. При этом придется рассмотреть три случая: а) $MN \cap l = L$, $N \notin MM_1$, б) $MN \| l$, в) $N \in MM_1$.

А. Пусть N – произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой MM_1, и прямая MN пересекает ось сжатия l в точке L. Рассмотрим случай, когда точки M и N лежат по одну сторону от оси l (рис. 49, а). По свойству 1 прямая ML перейдет в прямую M_1L. Опустим из точки N перпендикуляр NN_0 на ось сжатия. Прямая MM_0 пересекает прямую M_1L, следовательно, параллельная ей прямая NN_0 также ее пересекает. Пусть $N_1 = NN_0 \cap M_1L$.

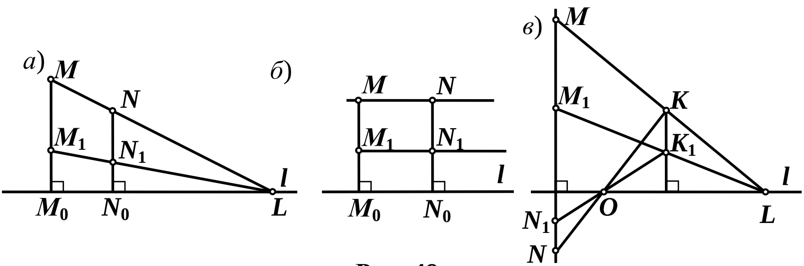


Рис. 49

Докажем, что точка N_1 – образ точки N в сжатии плоскости к прямой l с коэффициентом сжатия $k = \frac{M_0M_1}{M_0M}$. Из подобия треугольников M_0M_1L и N_0N_1L следует, что $\frac{N_0N_1}{M_0M_1} = \frac{N_0L}{M_0L}$, а из подобия треугольников M_0ML и N_0NL – $\frac{N_0N}{M_0M} = \frac{N_0L}{M_0L}$. Таким образом, $\frac{N_0N}{M_0M} = \frac{N_0N_1}{M_0M_1}$ или $\frac{N_0N_1}{N_0N} = \frac{M_0M_1}{M_0M} = k$, и значит, $N_0N_1 = k\,N_0N$. Поскольку точки M и N лежат по одну сторону от оси l, то отсюда следует, что $\overrightarrow{N_0N_1} = k\,\overrightarrow{N_0N}$, где $k = \frac{M_0M_1}{M_0M}$.

В случае, когда точки M и N лежат по разные стороны от прямой l, построение точки N_1 выполняется аналогично. Проведите его самостоятельно.

Б. Согласно свойству 2, в случае, когда $MN \| l$, образ прямой MN – параллельная ей прямая, проходящая через точку M_1 (рис. 49, б). Здесь $N_0N = M_0M$, $N_0N_1 = M_0M_1$.

В. Если $N \in MM_1$, то выбрав точку K, не лежащую на прямой MM_1 (рис. 49, в), сводим построение точки N_1 к двукратному выполнению построения, рассмотренного в случае а). □

4.2. *Эллипс и его свойства.* *Эллипсом* называется линия, которая является образом окружности при сжатии плоскости к прямой, проходящей через центр окружности (рис. 50).

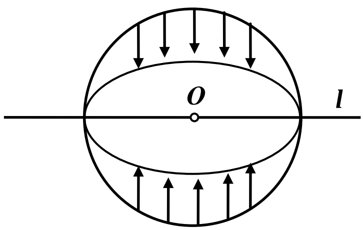


Рис. 50

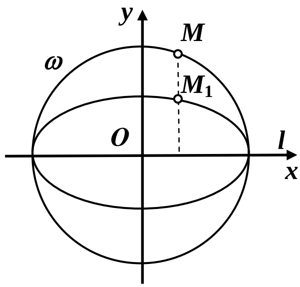


Рис. 51

Если заданы окружность, прямая, проходящая через ее центр, и коэффициент сжатия, то легко построить образ любой точки заданной окружности. Выполнив построение нескольких точек-образов и соединив их плавной линией, можно вычертить эллипс, который является образом окружности.

Выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ее ось Ox совпала с прямой сжатия l, а начало O было центром окружности ω радиуса a (рис. 51). В этой системе координат окружность ω определяется уравнением: $x^2 + y^2 = a^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (3)$$

Это значит, что любая точка $M(x, y)$ координаты которой удовлетворяют уравнению (3), принадлежит окружности ω, а точка, координаты которой не удовлетворяют (3), – не принадлежит.

Подставляя $x = x_1$, $y = \frac{1}{k} y_1$ в уравнение (3), получим: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{k^2 a^2} = 1$. Следовательно, координаты точки M_1, являющейся образом точки M окружности, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

где $b^2 = k^2 a^2$. Это уравнение в системе Oxy определяет эллипс γ, который получается при сжатии окружности ω к оси Ox. Уравнение (4) называется *каноническим уравнением эллипса.*

Используя каноническое уравнение эллипса, рассмотрим некоторые геометрические свойства этой линии.

Пусть эллипс γ задан в прямоугольной системе координат каноническим уравнением (4). Так как x и y входят в это уравнение во второй степени, то можно сделать следующие выводы.

Если $M(x, y) \in \gamma$, то $M_1(-x, -y) \in \gamma$ (рис. 52). Отсюда следует, что начало координат O является центром симметрии эллипса. Центр симметрии эллипса называется его *центром*.

Если $M(x, y) \in \gamma$, то $M_2(-x, y) \in \gamma$, $M_3(x, -y) \in \gamma$. Отсюда следует, что прямые Ox и Oy являются осями симметрии эллипса. Оси симметрии эллипса называются его *осями*. Каждая из осей пересекает эллипс в двух точках. Ось Ox имеет уравнение $y = 0$, поэтому из уравнения (4) для абсцисс точек A_1, A_2 пересечения имеем: $\frac{x^2}{a^2} = 1$. Отсюда $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Аналогично находим, что ось Oy пересекает эллипс в точках $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$. Точки пересечения эллипса с его осями называются *вершинами* эллипса. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 также называются *осями эллипса*. Центр эллипса O является общей серединой каждого из этих отрезков.

Отрезок, концы которого принадлежат эллипсу, называется *хордой* этого эллипса. Хорда эллипса, проходящая через его центр, называется *диаметром эллипса*. Значит, *оси эллипса являются его взаимно перпендикулярными диаметрами.*

При $k < 1$ имеем: $b < a$. В этом случае $A_1A_2 > B_1B_2$ и отрезки A_1A_2, B_1B_2 называются соответственно *большой и малой осями* эллипса. При этом числа $a = OA_1 = OA_2$, $b = OB_1 = OB_2$ называются соответственно *большой и малой полуосями* эллипса. При $k > 1$, наоборот, $b > a$. Здесь названия осей меняются соответствующим образом.

Рассмотрим параметрические уравнения эллипса и основанный на них способ построения точек эллипса.

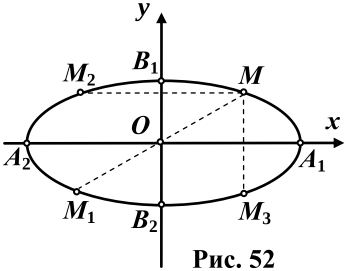


Рис. 52

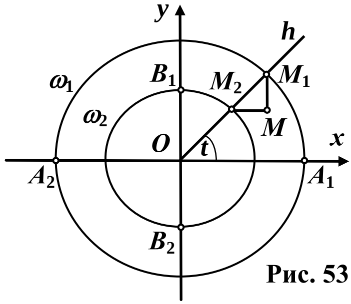


Рис. 53

Пусть отрезки A_1A_2 и B_1B_2 являются осями эллипса. Построим на них, как на диаметрах, концентрические окружности ω_1 и ω_2 соответственно (рис. 53). Рассмотрим луч h с началом в точке O. Этот луч пересекает окружности ω_1 и ω_2 соответственно в точках M_1 и M_2. Через точку M_1 проведем прямую, параллельную малой оси B_1B_2, а через точку M_2 – прямую, параллельную большой оси A_1A_2. Покажем, что точка M пересечения этих прямых принадлежит эллипсу с заданными осями.

Выберем прямоугольную систему координат Oxy с началом в точке O. Пусть в этой системе точка M имеет координаты (x, y). Далее, пусть луч h образует с лучом OA_1 угол t. Так как $OM_1 = a$, $OM_2 = b$, то $M_1(a\cos t, a\sin t)$, $M_2(b\cos t, b\sin t)$. Поскольку точки M и M_1 имеют равные абсциссы, а точки M и M_2 – равные ординаты,

$$x = a\cos t, y = b\sin t. \qquad (5)$$

Из равенств (5) $\cos t = \frac{x}{a}$, $\sin t = \frac{y}{b}$, поэтому в силу основного тригонометрического тождества ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. построенная точка принадлежит эллипсу с полуосями a и b.

Для любого значения $t \in [0, 2\pi)$ точка $M(x, y)$, координаты которой вычисляются по формулам (5), принадлежит эллипсу. Уравнения (5) называются *параметрическими уравнениями* эллипса.

В курсе геометрии доказывается, что: 1) диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам; 2) касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания. Поэтому каждый из двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности: 1) делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, 2) параллелен касательной, проведенной через конец другого диаметра.

Два диаметра эллипса, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются *сопряженными*.

Так как при сжатии плоскости к прямой середина отрезка отображается в середину отрезка, а параллельные прямые переходят в параллельные, то *при сжатии окружности к прямой, проходящей через ее центр:*

– диаметр окружности переходит в диаметр эллипса;

– центр окружности переходит в центр эллипса;

– взаимно перпендикулярные диаметры окружности переходят в сопряженные диаметры эллипса;

– касательная к окружности переходит в касательную к эллипсу, при этом она параллельна диаметру, который сопряжен диаметру, проведенному через точку касания.

Очевидно, что оси эллипса являются его сопряженными диаметрами; их называют *главными диаметрами* эллипса. Можно доказать, что любая другая пара сопряженных диаметров эллипса уже не является взаимно перпендикулярной.

Рассмотрим, как выполняется построение эллипса по его сопряженным диаметрам.

Возьмем окружность ω_0 и построим пару ее взаимно перпендикулярных диаметров A_0B_0 и C_0D_0. Через концы диаметров проведем касательные к окружности (рис. 54). Полученный при этом квадрат $K_0L_0E_0N_0$ изображается произвольным параллелограммом $KLEN$. Взаимно перпендикулярные диаметры окружности при этом изобразятся средними линиями AB и CD параллелограмма. Для искомого эллипса эти средние линии будут сопряженными диаметрами.

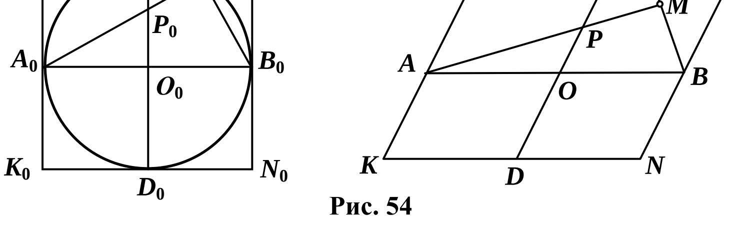


Рис. 54

Пусть M_0 – произвольная точка окружности ω_0 и $A_0M_0 \cap C_0D_0 = P_0$, $B_0M_0 \cap L_0E_0 = R_0$. Прямоугольные треугольники $A_0P_0O_0$ и $B_0R_0E_0$ будут равны по катету и острому углу ($\angle P_0A_0O_0$, $\angle R_0B_0E_0$ – углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Следовательно, $O_0P_0 = E_0R_0$ и $\frac{O_0P_0}{P_0C_0} = \frac{E_0R_0}{R_0C_0}$. По свойству 3 параллельного проектирования

$$\frac{O_0P_0}{P_0C_0} = \frac{OP}{PC}, \frac{E_0R_0}{R_0C_0} = \frac{ER}{RC}. \qquad (6)$$

Поэтому

$$\frac{OP}{PC} = \frac{ER}{RC}. \qquad (7)$$

Пропорции (6), таким образом, дают способ построения точек P и R, соответствующих точкам P_0 и R_0. Точка M, соответствующая точке M_0, строится как пересечение прямых AP и BR.

При построениях эллипса по паре сопряженных диаметров вновь нет необходимости строить окружность-оргинал и ее взаимно перпендикулярные диаметры. Если на стороне LE параллелограмма $KLEN$, построенного на сопряженных диаметрах (как средних линиях), взять произвольную точку R, а на средней линии CD, пользуясь пропорцией (7), построить точку P, то мы сможем найти точку M эллипса: $M = AP \cap BR$.

При построении эллипса по его сопряженным диаметрам рассмотренным способом выполняют построение его нескольких точек, позволяющих с нужной точностью вычертить этот эллипс от руки.

На практике при построении точек эллипса по сопряженным диаметрам обычно поступают следующим образом. По заданным сопряженным диаметрам AB и CD строят параллелограмм $KLEN$, для которого они являются средними линиями (рис. 55). Затем пару противоположных сторон параллелограмма делят на $2n$ равных частей. На столько же частей делят соединяющую их среднюю линию (на рис. 55 $n = 3$). Для построения точек эллипса точки деления ломаной OCE ну-

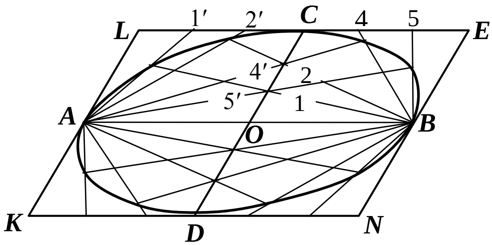


Рис. 55

меруют по часовой стрелке номерами 1, 2, … , $2n$, а точки деления ломаной LCO – по часовой стрелке номерами $1'$, $2'$, … , $(2n)'$. Точки M_1, M_2, … , M_{2n} пересечения лучей $B1$ и $A1'$, $B2$ и $A2'$, … , $B(2n)$ и $B(2n)'$ принадлежат искомому эллипсу. Аналогичным образом строится часть эллипса, расположенная ниже диаметра AB.

В курсе геометрии при построении круглых тел для вычерчивания эллипсов обычно используются его шаблоны. Это позволяет значительно облегчить процесс построения нужного чертежа и существенно сократить время его выполнения.

Задача 4.2. С помощью шаблона вычерчен эллипс, но центр его не был указан. Постройте центр эллипса.

Решение. Проводим две параллельные хорды эллипса, находим их середины. Через середины хорд проводим диаметр эллипса. Его середина будет искомым центром эллипса. □

Задача 4.3. Точка A принадлежит эллипсу γ. Постройте касательную к эллипсу в точке A.

Решение. Касательная к эллипсу в данной его точке параллельна диаметру, который сопряжен диаметру, проведенному через точку касания. Поэтому сначала построим диаметр AB эллипса, а затем сопряженный ему диаметр CD (рис. 56). Для построения диаметра CD проводим хорду MN эллипса γ, параллельную диаметру AB, и находим ее середину K. Диаметр CD проходит через центр O эллипса и середину K хорды MN. Искомая касательная параллельна диаметру CD. □

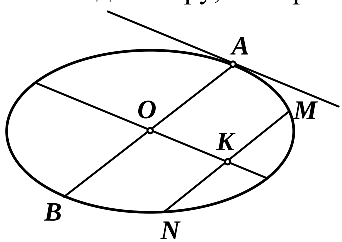


Рис. 56

4.3. *Эллипс как проекция окружности.* Возьмем плоскости α и α', пересекающиеся по прямой a, и плоскость β, перпендикулярную к a. Рассмотрим параллельное проектирование плоскости α на плоскость α' в направлении прямой l, параллельной β. Пусть M – произвольная точка плоскости α, а $M' \in \alpha'$ – ее проекция. Плоскость, проходящая через MM' перпендикулярно a, пересечет прямую a в точке M_0. При этом угол MM_0M' будет линейным углом двугранного угла, получающегося при пересечении плоскостей α и α' (рис. 57). Обозначим величину этого угла через φ, а величину угла $MM'M_0$, образованного прямой MM' с плоскостью α', – через ψ. Из треугольника MM_0M' по теореме синусов имеем: $\frac{M_0M}{\sin\psi} = \frac{M_0M'}{\sin(\pi-\varphi-\psi)}$. Отсюда $M_0M' = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi} M_0M$.

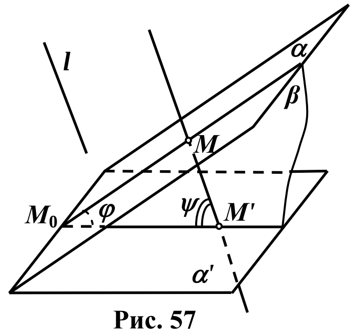


Рис. 57

Повернем плоскость α вокруг прямой a до совмещения с плоскостью α' так, чтобы лучи M_0M и M_0M', перпендикулярные прямой a, совместились. Так как при этом

1) величина $k = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi} > 0$ является для любой пары точек M и M' постоянной,

2) точки M и M' лежат в одной полуплоскости с границей a,

3) $MM' \perp a$,

4) $M_0M' = kM_0M$,

то $\overrightarrow{M_0M'} = k\,\overrightarrow{M_0M}$, где $k > 0$. Отсюда следует, что на совмещенной плоскости точка M' является образом точки M при сжатии этой плоскости к прямой a с коэффициентом сжатия k.

Пусть ω – окружность с центром на прямой a, лежащая в плоскости α. Очевидно, что после совмещения плоскостей α, α' и последующего сжатия плоскости к прямой a, окружность ω перейдет в эллипс ω'. Если AB – диаметр окружности ω , лежащий на прямой a пересечения плоскостей α и α', CD – перпендикулярный ему диаметр этой окружности, то проекцией диаметра AB будет он сам, а проекцией диаметра CD – диаметр эллипса $C'D'$ (рис. 58). При этом $C'D' \perp AB$. Поэтому отрезки AB и

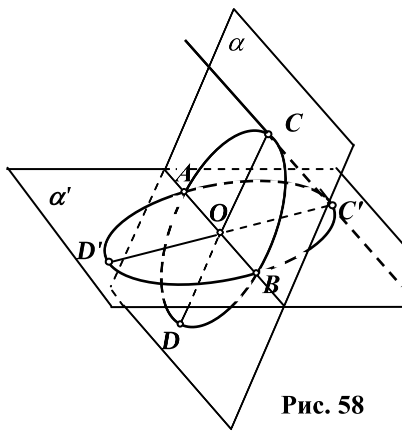


Рис. 58

$C'D'$ будут осями эллипса ω'. За счет выбора направления проектирования всегда можно добиться того, чтобы $C'D' < AB$.

Отметим также, что при проектировании в направлении прямой CC' окружности ω на плоскость π, параллельную плоскости α', диаметры AB и CD окружности спроектируются в оси эллипса, равного эллипсу ω'.

Итак, *параллельная проекция окружности ω на плоскость π есть эллипс*. Этот эллипс, а также любой эллипс, ему подобный, будет изображением окружности ω. Далее можно показать (мы это делать не будем), что произвольный эллипс можно принять за изображение окружности.

4.4. *Изображение вписанных и описанных многоугольников.* Среди школьных стереометрических задач достаточно широко представлены задачи на комбинации правильных многогранников и круглых тел. При построении чертежей к этим задачам надо уметь строить изображения правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее. Представим, что построение такого изображения начато с изображения многоугольника. Следующим шагом придется строить изображения взаимно перпендикулярных диаметров окружности и только затем по этим сопряженным диаметрам строить эллипс, являющийся изображением окружности. Процесс построения изображений многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее, значительно упрощается, если считать эллипс – изображение окружности – заданным. Его, например, можно построить с помощью шаблона. С этого эллипса и будем всякий раз начинать построение.

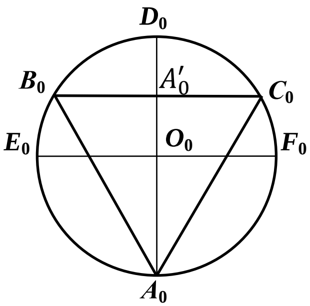


Рис. 59

Задача 4.4. Постройте изображение правильного треугольника, вписанного в окружность.

Решение. Пусть $A_0B_0C_0$ – правильный треугольник, вписанный в окружность ω_0 (рис. 59). Проведем взаимно перпендикулярные диаметры A_0D_0, E_0F_0 окружности ω_0. Первый из них содержит медиану A_0A_0' треугольника, а второй – параллелен стороне B_0C_0. Центр O_0 описанной окружности является точкой пересечения медиан треугольника. Поэтому $A_0O_0 : O_0A_0' = 2:1$, и значит, $O_0A_0' = A_0'D_0$.

Изображениями взаимно перпендикулярных диаметров окружности служат сопряженные диаметры эллипса. Изображениями параллельных прямых являются параллельные прямые, отрезка – отрезок, а середины отрезка – середина отрезка. Поэтому изображением точки A_0' будет такая точка $A' \in AD$, что $OA' = A'D$, а хорда BC эллипса, параллельная диаметру EF и проходящая через точку A', будет изображением стороны B_0C_0.

Итак, как условились, вычерчиваем эллипс γ, изображающий окружность. Выберем на эллипсе произвольную точку A, проводим диаметр AD эллипса и строим сопряженный ему диаметр EF. (Если центр эллипса не указан, сначала строим центр O эллипса.) Находим середину отрезка OD и проводим через эту середину хорду BC эллипса, параллельную диаметру EF. Строим хорды AB и AC. Треугольник ABC, вписанный в эллипс γ, –

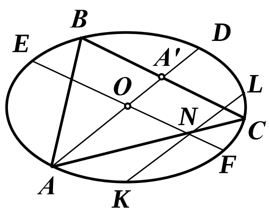


Рис. 60

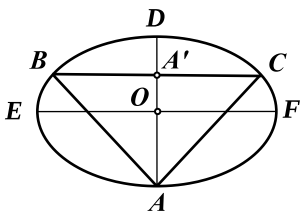


Рис. 61

искомое изображение правильного треугольника $A_0B_0C_0$, вписанного в окружность ω_0 (рис. 60). На рисунке 61 представлен случай, когда диаметры эллипса являются главными. □

С появлением навыков изображения вписанных в окружность многоугольников оригиналы обычно не строят.

Наряду с правильными треугольниками чаще других приходится строить вписанные правильные четырехугольники, шестиугольники и пятиугольники.

При изображении вписанного в окружность квадрата строятся сопряженные диаметры эллипса и их концы соединяются отрезками (рис. 62, 63).

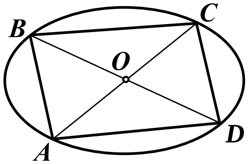


Рис. 62

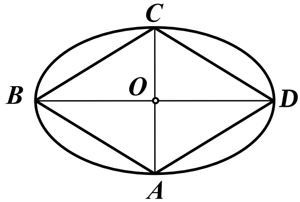


Рис. 63

При изображении правильного вписанного в окружность шестиугольника удобно использовать изображение правильного вписанного треугольника (рис. 60). Принимая вершины треугольника за изображения вершин шестиугольника, построим его медианы. Они пересекают эллипс в точках, которые являются изображениями трех остальных вершин шестиугольника (рис. 64, 65). Обоснуйте это утверждение.

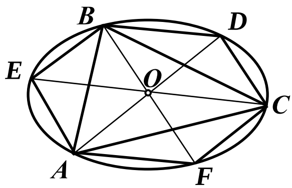


Рис. 64

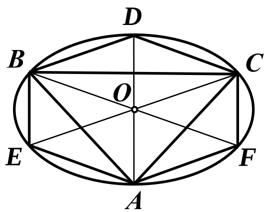


Рис. 65

Задача 4.5. Постройте изображение правильного треугольника, описанного около окружности.

Решение. Пусть $A_0B_0C_0$ – правильный треугольник, описанный около окружности ω_0 (рис. 66). Центр O_0 окружности ω_0 также совпадает с центром треугольника, который является точкой пересечения медиан. Медианы являются и его высотами.

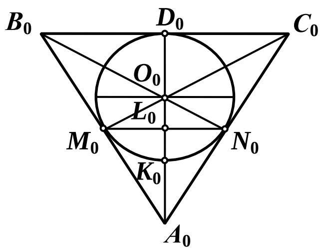


Рис. 66

Рассмотрим, например, медиану A_0D_0. Она содержит диаметр D_0K_0 окружности ω_0, при этом точка D_0 является точкой касания окружности со стороной B_0C_0 (касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проведенному через точку касания), а точка K_0 такова, что $O_0K_0 = K_0A_0$. Средняя линия M_0N_0 треугольника, параллельная стороне B_0C_0, делит медиану A_0D_0 пополам ($D_0L_0 = L_0A_0$) и ее концы M_0, N_0 являются точками касания окружности ω_0 со сторонами A_0B_0, A_0C_0 соответственно.

Поэтому изображение правильного треугольника, описанного около окружности, можно выполнить следующим образом:

1) строим эллипс γ, изображающий окружность;

2) выбираем точку $\boldsymbol{D}$, принадлежащую эллипсу и проводим через нее диаметр $\boldsymbol{D}K$ этого эллипса;

3) на продолжении диаметра $\boldsymbol{D}K$ за точку K строим точку A такую, что $DK = KA$;

4) находим середину L отрезка DA;

5) строим диаметр эллипса, сопряженный диаметру $\boldsymbol{D}K$;

6) через точки D и L проводим прямые d и l, параллельные этому диаметру; M, N – точки пересечения прямой l с эллипсом;

7) проводим прямые AM и AN; $AM \cap d = B$, $AN \cap d = C$.

Треугольник ABC, описанный около эллипса γ, – искомое изображение правильного треугольника $A_0B_0C_0$, описанного около окружности ω_0 (рис. 67, 68). (Рисунок 68 соответствует случаю, когда сопряженные диаметры эллипса являются главными.) □

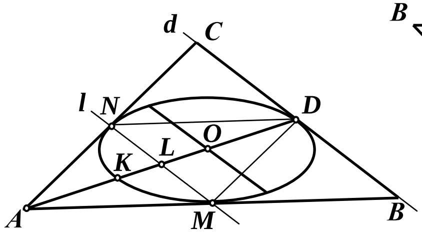


Рис. 67

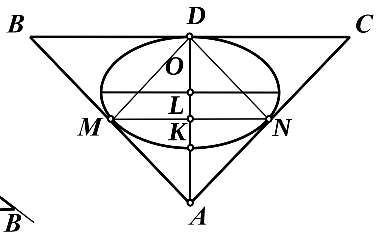


Рис. 68

На рисунке 69 показано изображение квадрата, описанного около окружности. Для построения этого изображения проводятся касательные к эллипсу через концы его сопряженных диаметров.

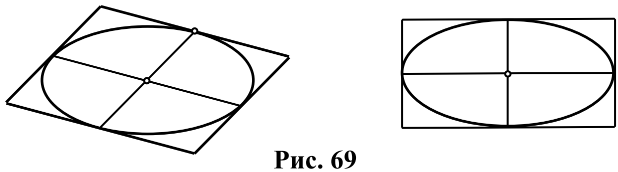


Рис. 69

Чтобы изобразить правильный шестиугольник, описанный около окружности, сначала изображаем описанный около нее правильный треугольник. Затем через точки пересечения медиан треугольника с эллипсом проводим касательные к эллипсу параллельно соответствующим сторонам треугольника (рис. 70).

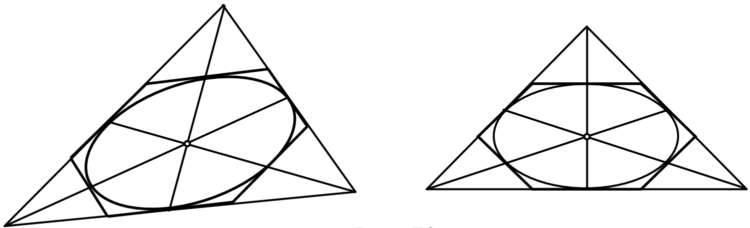


Рис. 70

Задачи и упражнения

1. Постройте образ окружности и пары ее произвольных взаимно перпендикулярных диаметров при сжатии плоскости к прямой, проходящей через центр окружности, с коэффициентом сжатия k: а) большим 1, б) меньшим 1.

2. В дальнейшем для построения изображений круглых тел потребуются трафареты подобных эллипсов разных размеров. Используя сжатие плоскости к прямой, изготовьте из картона или тонкой пластмассы три трафарета эллипсов со следующими полуосями: а) $a = 4\,см$, $b = 2\,см$; б) $a = 3\,см$, $b = 1{,}5\,см$; в) $a = 2\,см$, $b = 1\,см$. Проведите оси изготовленных эллипсов. Постройте пару сопряженных диаметров, отличных от осей, так, как показано на рисунке 71.

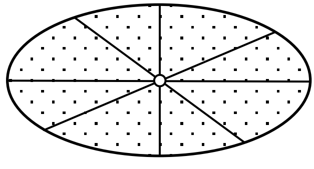


Рис. 71

3. Даны окружность ω и принадлежащая ей точка A. Постройте касательную к окружности в данной точке A, а затем образ окружности и этой касательной при сжатии плоскости к прямой, проходящей через центр окружности.

4. Даны окружность ω и не лежащая на ней точка A. Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку A, а затем образ окружности и этой касательной при сжатии плоскости к прямой, проходящей через центр окружности.

5. Постройте эллипс, заданный парой сопряженных диаметров.

6. Эллипс задан своими осями. Постройте какую-нибудь точку этого эллипса и касательную к эллипсу в этой точке.

7. Эллипс задан своими осями. Постройте еще одну пару сопряженных диаметров эллипса, не вычерчивая самого эллипса.

8. Дано изображение окружности. Постройте изображения:

а) вписанного в нее равнобедренного прямоугольного треугольника;

б) описанного около нее равнобедренного прямоугольного треугольника.

9. Дано изображение окружности. Постройте изображения:

а) вписанного в нее правильного восьмиугольника;

б) описанного около нее правильного восьмиугольника.

10. Дано изображение окружности. Постройте изображения:

а) вписанного в нее правильного пятиугольника;

б) описанного около нее правильного пятиугольника.

11. Дано изображение квадрата. Постройте изображение окружности:

а) вписанной в данный квадрат;

б) описанной около этого квадрата.

12. Дано изображение квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Постройте изображение какого-либо правильного треугольника, вписанного в окружность, описанную около квадрата $A_0B_0C_0D_0$.

13. Дано изображение квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Постройте изображение какого-либо другого квадрата, вписанного в окружность, описанную около квадрата $A_0B_0C_0D_0$.

14. Докажите, что множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна длине данного отрезка PQ ($PQ > F_1F_2$), есть эллипс.

Точки F_1, F_2, о которых говорится в формулировке этой задачи, называются *фокусами* эллипса.

§ 5. Изображения цилиндра и конуса

5.1. ***Изображение цилиндра.*** Пусть цилиндр-оригинал F_0 установлен на горизонтальной плоскости. Для того чтобы изображение было наглядным, плоскость изображения π выберем вертикальной. При этом ось цилиндра и его образующие будут параллельны плоскости π. Далее, вновь из соображений наглядности, направление проектирования выберем параллельным плоскости, проходящей через ось цилиндра перпендикулярно к плоскости π. Если проектирование будет ортогональным (параллельным основаниям цилиндра), то цилиндр-оригинал спроектируется в прямоугольник (рис. 72). Такое изображение также не будет наглядным. Поэтому направление проектирования не должно быть параллельным основаниям (рис. 73).

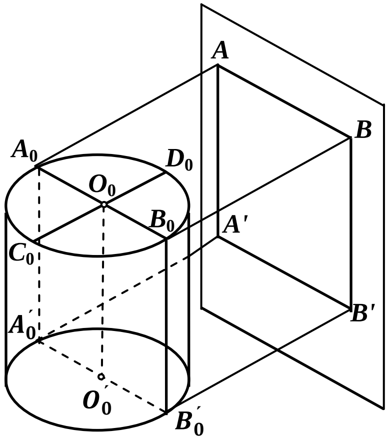


Рис. 72

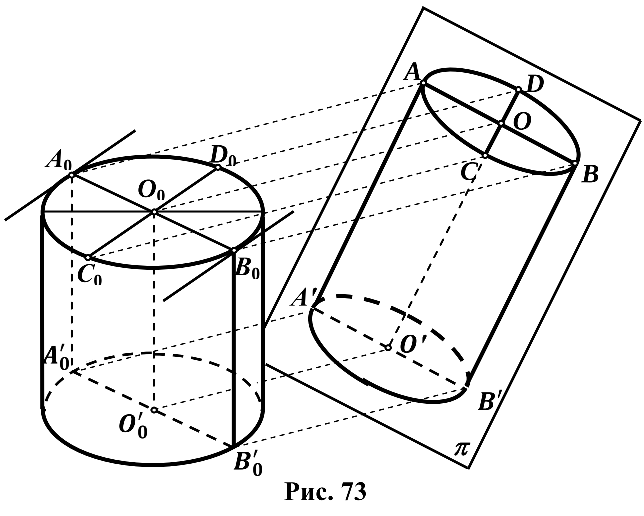


Рис. 73

Рассмотрим, как изображается цилиндр F_0 при выбранном нами способе проектирования. Пусть ω_0 – окружность верхнего основания цилиндра F_0, A_0B_0 – ее диаметр, параллельный плоскости изображения π, а C_0D_0 – перпендикулярный ему диаметр. При проектировании на плоскость π окружность ω_0 спроектируется в эллипс γ с осями AB и CD, которые являются проекциями диаметров A_0B_0 и C_0D_0. При этом опять из соображений наглядности будем считать, что направление проектирования выбрано таким образом, что $CD < AB$.

Так как диаметр C_0D_0 лежит в плоскости, проходящей через ось O_0O_0' цилиндра, перпендикулярно плоскости π, то проекции D, O, C, O' точек D_0, O_0, C_0, O_0' соответственно, принадлежат одному вертикальному отрезку. Касательная к окружности ω_0 в точке A_0 лежит в плоскости верхнего основания и параллельна диаметру C_0D_0, поэтому она спроектируется в касательную к эллипсу γ в точке A и, значит, параллельна CD (рис. 74). Пусть A_0A_0' – образующая цилиндра. Плоскость, в которой лежат рассмотренная выше касательная и прямая A_0A_0', перпендикулярна плоскости π, поэтому проекции этих прямых совпадают. Таким образом, проекция AA' образующей A_0A_0', лежит на касательной к эллипсу γ в точке A. Аналогично, проекция BB' образующей B_0B_0' лежит на касательной к эллипсу γ в точке B.

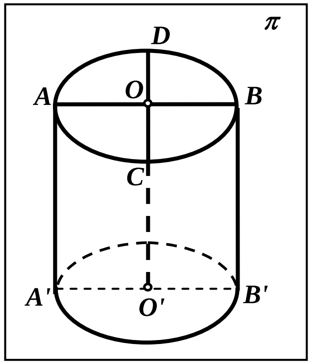


Рис. 74

Нижнее основание ω_0' цилиндра проектируется в эллипс γ', равный эллипсу γ. При этом эллипс γ' будет образом эллипса γ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA'}$.

Когда требуется изобразить цилиндр, будем изображать фигуру F, подобную фигуре на рисунке 74. Построение фигуры F обычно начинают с вычерчивания эллипса, изображающего одно из оснований цилиндра. В некото-

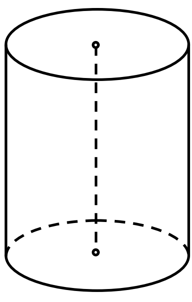


Рис. 75

рых случаях при изображении цилиндра оси этого эллипса удобно не строить (рис. 75).

Задача 5.1. Построить изображение правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

Решение. Основаниями правильной четырехугольной призмы являются квадраты, вписанные в окружности оснований цилиндра. Так как диагонали квадрата перпендикулярны, то их изображением будут сопряженные диаметры эллипса, изображающего окружность основания.

Строим эллипс – изображение окружности основания. Затем выполняем построение изображений квадратов, вписанных в основания цилиндра, и изображение боковых ребер призмы (рис. 76). На левом рисунке для изображения квадратов используются оси эллипсов. Такое изображение недостаточно наглядно, так как изображения двух противоположных ребер призмы лежат на одной прямой. Более наглядное изображение дано на правом рисунке. Здесь для построения квадратов используются сопряженные диаметры эллипсов, не являющиеся осями. □

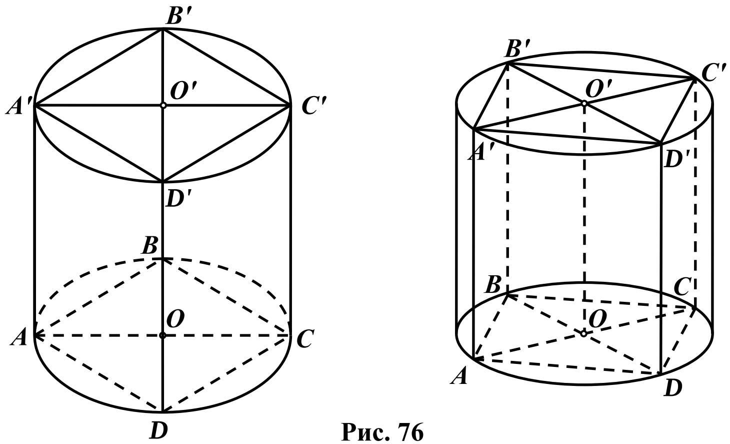


Рис. 76

5.2. *Изображение конуса*. Пусть вновь конус-оригинал F_0 установлен на горизонтальной плоскости. Из соображений наглядности выберем плоскость изображения π вертикальной. Тогда ось S_0O_0 конуса будет параллельна плоскости π. Направление проектирования возьмем параллельным плоскости, проходящей через ось конуса перпендикулярно плоскости изображения π. При этом будем дополнительно требовать, чтобы прямая этого направления, проходящая через вершину S_0 конуса, пересекала плоскость основания вне окружности основания в точке S_0' (рис. 77).

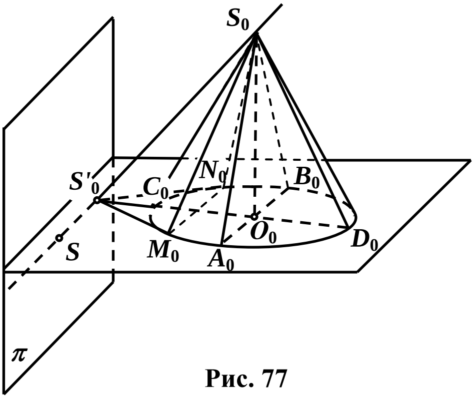


Рис. 77

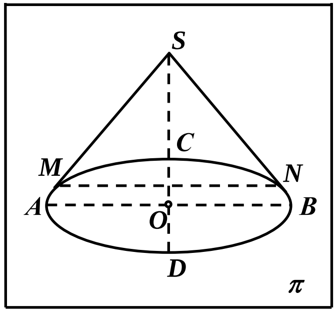


Рис. 78

Пусть A_0B_0, C_0D_0 – взаимно перпендикулярные диаметры окружности ω_0 основания конуса, при этом $A_0B_0 \| \pi$. Тогда $S_0' \in C_0D_0$. Проведем в плоскости основания касательные $S_0'M_0$, $S_0'N_0$ к окружности ω_0. Ясно, что $M_0N_0 \| A_0B_0$.

Рассмотрим плоскости $S_0S_0'M_0$, $SS_0'N_0$. Эти плоскости содержат образующие S_0M_0, S_0N_0 конуса и параллельны направлению проектирования. При проектировании конуса на плоскость π окружность ω_0 проектируется в эллипс γ, диаметры A_0B_0, C_0D_0 окружности – в оси AB, CD эллипса, вершина S_0 – в точку S, лежащую на прямой CD вне эллипса. Так как плоскость $S_0S_0'M_0$ параллельна направлению проектирования, то прямые $S_0'M_0$ и S_0M_0 проектируются в одну и ту же прямую. Но $S_0'M_0$ – касательная к окружности ω_0 в точке M_0, поэтому ее проекцией будет касательная к эллипсу γ в точке M, где M – проекция точки M_0. Таким образом, проекцией образующей S_0M_0 конуса будет отрезок SM касательной к эллипсу γ в точке M, проведенной из точки S. Аналогично строится изображение SN образующей S_0N_0 (рис. 78).

Когда требуется изобразить конус, будем изображать фигуру F, подобную фигуре на рисунке 78. Построение изображения конуса обычно начинают с вычерчивания эллипса, изображаю-

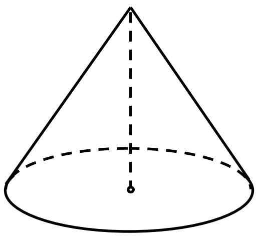


Рис. 79

щего его основание. В некоторых случаях при изображении конуса оси этого эллипса удобно не строить (рис. 79).

Задача 5.2. Построить изображение конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду.

Решение. Построение заданной комбинации фигур удобно начать с построения изображения квадрата, описанного около окружности. Окружность изображается эллипсом, а стороны параллелограмма, изображающего квадрат, касаются эллипса в концах его сопряженных диаметров. На левом рисунке (рис. 80) в качестве сопряженных диаметров взяты его оси, а на правом – сопряженные диаметры осями не являются.

Далее, вертикальным отрезком SO изображается ось конуса, строятся касательные к эллипсу, проведенные из точки S, и изображения боковых ребер пирамиды. □

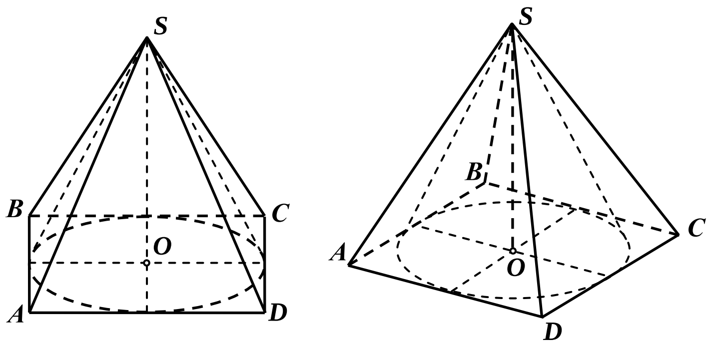


Рис. 80

Часто на геометрических чертежах для большей наглядности вписанные тела изображают другим цветом, а описанные тела считают при этом как бы прозрачными. На рисунке 81 показаны изображения конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, выполненные с учетом этой договоренности.

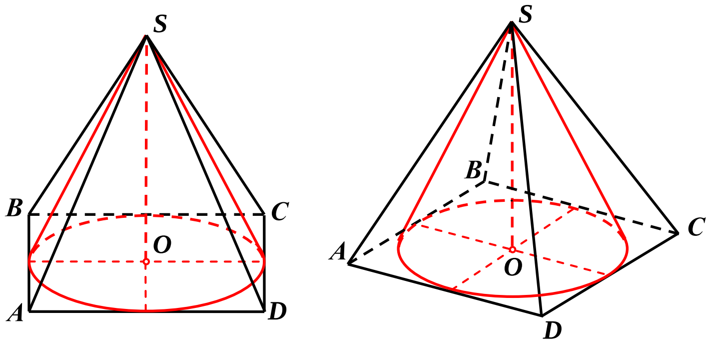


Рис. 81

5.3. ***Изображение сечений цилиндра и конуса плоскостью***. Сечения цилиндра плоскостью строятся аналогично сечениям призмы. Решим методом следов следующую задачу.

Задача 5.3. Построить сечения цилиндра плоскостью, проходящей через точку A, лежащую на боковой поверхности цилиндра, и точки B, C, принадлежащие окружности его нижнего основания.

Решение. Для задания точки A задана ее вторичная проекция – точка A_1 пересечения образующей цилиндра, проходящей через точку A, с окружностью нижнего основания. Поскольку точки B и C лежат по условию в плоскости нижнего основания,

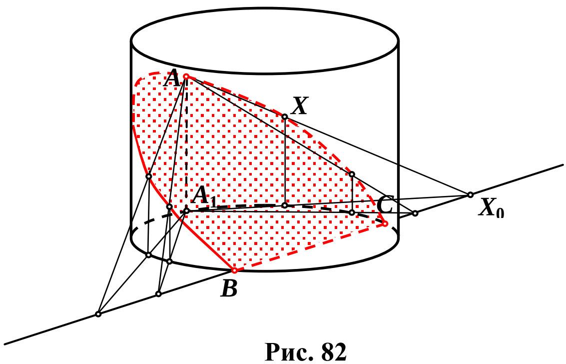


Рис. 82

их вторичные проекции совпадают с самими точками, а прямая BC – след секущей плоскости на плоскости нижнего основания цилиндра (рис. 82).

Секущая плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра по дуге BAC эллипса, а его нижнее основание – по отрезку BC. Для построения точки дуги эллипса выбираем точку X_0 на прямой BC, не лежащую на отрезке BC. Через точку X_0 проводим прямые X_0A и X_0A_1, прямая X_0A_1 является проекцией прямой X_0A на плоскость нижнего основания цилиндра параллельно его образующим. Пусть прямая X_0A_1 пересекает эллипс, изображающий нижнее основание цилиндра, в точке X_1. Тогда точка X дуги BAC находится как точка пересечения образующей цилиндра, проходящей через точку X_1, с прямой X_0A. На практике, построив несколько точек сечения, их от руки соединяют плавной линией. □

В том случае, когда секущая плоскость проходит через две образующие цилиндра, сечение является прямоугольником.

Прежде чем рассмотреть построение сечения конуса плоскостью, напомним, что оно может быть: 1) эллипсом или дугой эллипса, 2) дугой параболы, 3) дугой одной из ветвей гипербо-

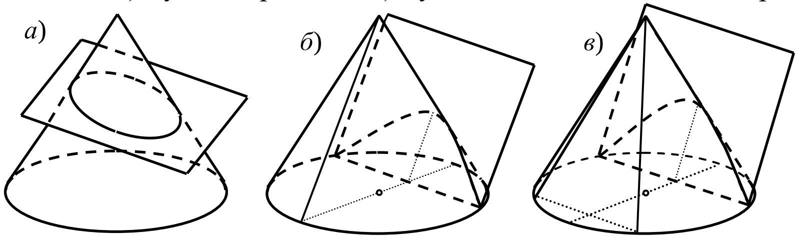


Рис. 83

лы. В первом случае секущая плоскость пересекает все образующие конуса (рис. 83, *а*), во втором – параллельна ровно одной образующей конуса (рис. 83, *б*), в третьем – параллельна двум образующим конуса (рис. 83, *в*). В том случае, когда секущая плоскость пересекает конус по двум образующим, сечение является треугольником.

Изображение сечения конуса плоскостью выполняется аналогично построению сечения плоскостью пирамиды.

Задача 5.4. Построить сечения конуса плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на его боковой поверхности.

Решение. Чтобы задать точки A, B, C и сделать изображение полным, укажем их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость основания конуса в центральном проектировании из его вершины S (рис. 84). Пусть $AB \cap A_1B_1 = B_0$, $AC \cap A_1C_1 = C_0$, тогда B_0C_0 – след секущей плоскости на плоскости основания.

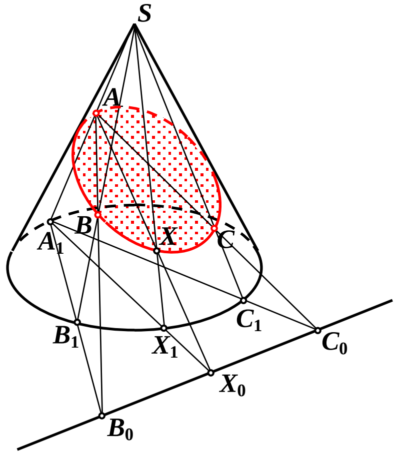


Рис. 84

Точка X_1, принадлежащая эллипсу, изображающему окружность основания конуса, является вторичной проекцией точки X сечения. Чтобы построить изображение точки X, проводим прямую A_1X_1. Пусть $A_1X_1 \cap B_0C_0 = X_0$, тогда $X = SX_1 \cap AX_0$. Построив изображения нескольких точек сечения, соединяем их от руки плавной линией. □

Когда секущая плоскость параллельна плоскости основания конуса, построение изображения сечения значительно упрощается. Теперь секущая плоскость пересекает боковую поверхность конуса по окружности. Поскольку при параллельном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков, изображением окружности-сечения является эллипс, подобный эллипсу, изображающему окружность основания.

На основании сказанного можно дать следующий способ построения изображения усеченного конуса:

1. Вычерчиваем эллипс, изображающий нижнее основание усеченного конуса, и его большой диаметр.

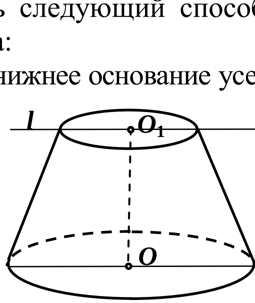


Рис. 85

2. Строим отрезок OO_1, перпендикулярный большому диаметру эллипса и проходящий через его середину O.

3. Через точку O_1 проводим прямую l, перпендикулярную OO_1.

4. Вычерчиваем эллипс, подобный эллипсу, изображающему нижнее осно-

вание конуса, центр которого находится в точке O_1, а большой диаметр лежит на прямой l.

5. Проводим общие касательные эллипсов, изображающие образующие конуса (рис. 85).

На практике для построения усеченного конуса от руки используют два трафарета подобных эллипсов.

Задачи и упражнения

1. Постройте изображение цилиндра и вписанного в него правильного n-угольника ($n = 3, 5, 6$).

2. Постройте изображение цилиндра и описанного около него правильного n-угольника ($n = 3, 5, 6$).

3. Постройте изображение конуса и вписанного в него правильного n-угольника ($n = 3, 5, 6$).

4. Постройте изображение конуса и описанного около него правильного n-угольника ($n = 3, 5, 6$).

5. Постройте изображение сечения цилиндра плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на его образующих.

6. Постройте изображение сечения конуса плоскостью, проходящей через точку, принадлежащую основанию конуса, и две точки, лежащие на его образующих.

7. Дано изображение конуса, двух его образующих и точки на боковой поверхности. Постройте изображение сечения конуса плоскостью, параллельной заданным образующим и проходящей через данную точку.

8. Дано изображение конуса, его образующей и двух точек на боковой поверхности. Постройте изображение сечения конуса плоскостью, проходящей через данные точки параллельно данной образующей.

9. Постройте изображение усеченного конуса и вписанной в него правильной треугольной пирамиды.

10. Постройте изображение усеченного конуса и описанной около него правильной шестиугольной пирамиды.

11. Постройте изображение сечения усеченного конуса плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на боковой поверхности конуса.

§ 6. Изображение шара и его сечений

6.1. ***Изображение шара.*** Пусть F_0 – шар. Выберем направление проектирования и рассмотрим касательные к шару, принадлежащие выбранному направлению. Эти касательные образуют цилиндрическую поверхность и проходят через точки большой окружности шара, плоскость которой перпендикулярна направлению проектирования.

Выберем плоскость изображения. В общем случае цилиндрическая поверхность пересечет эту плоскость по эллипсу, а проекция F_1 шара F_0 будет частью плоскости, ограниченной этим эллипсом. Такое изображение шара не является наглядным (рис. 86).

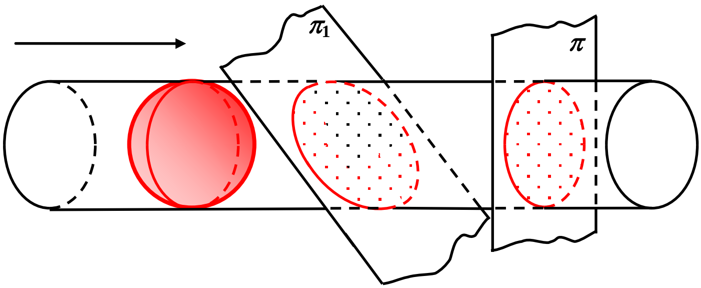


Рис. 86

Если плоскость изображения выбрать перпендикулярной направлению проектирования, то проектирование будет ортогональным и изображением шара будет круг F. Круг, конечно, дает о шаре более наглядное представление, но в круг можно спроектировать и равный ему круг, и эллипс, и цилиндр (если проектирование вести параллельно его образующим).

Прежде чем продолжить разговор о том, как сделать изображение шара более наглядным, вспомним понятия, связанные с шаром.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется *большим кругом*, а его окружность – *экватором.* Точки пересечения прямой, перпендикулярной плоскости экватора, с поверхностью шара называются *полюсами*, соответствующими этому экватору, а соединяющий их диаметр – *полярной осью*.

Если на проекционном чертеже шара изобразить какой-либо экватор и соответствующие ему полюсы, то у изображения появится объемность. Оно станет наглядным.

Какой экватор изображать? Во-первых, желательно, чтобы отрезок, соединяющий изображения полюсов, был на чертеже вертикальным. Это желание будет выполнено, если плоскость изображения π будет вертикальной, а плоскость α, проходящая через полюсы N_0, S_0 шара параллельно направлению проектирования, – ей перпендикулярной и тоже вертикальной. Более того, можно считать, что плоскость изображения π проходит через центр шара, и, значит, пересекает его по окружности большого круга. Эту окружность обычно называют *очерковой* окружностью шара.

Обозначим точки пересечения прямой $l = \alpha \cap \pi$ с поверхностью шара буквами P_0 и Q_0. Если плоскость экватора выбрать перпендикулярной плоскости π, то экватор и диаметр, соединяющий полюсы, изобразятся перпендикулярными диаметрами окружности (рис. 87) и изображение шара не станет нагляднее. Поэтому плоскость экватора не должна быть перпендикулярной плоскости изображения.

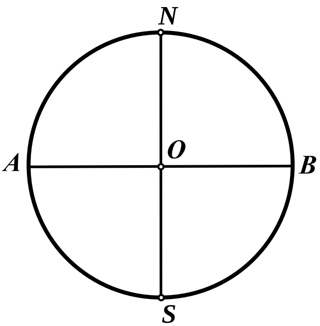


Рис. 87

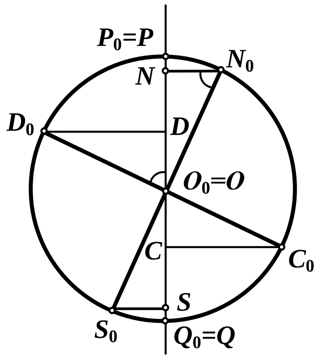


Рис. 88

На рисунке 88 дано сечение шара плоскостью α. На этом рисунке P_0Q_0 – прямая пересечения плоскостей α и π; C_0D_0 – пересечение α и экваториального круга, N_0S_0 – диаметр, соединяющий полюсы. При проектировании на плоскость π полюсы N_0 и S_0 спроектируется в точки N и S соответственно, диаметр C_0D_0 экватора – в малую ось CD эллипса, изображающего этот экватор.

Большая ось AB эллипса (рис. 89) будет проекцией диаметра A_0B_0 экватора, перпендикулярного диаметру C_0D_0 и, следовательно, параллельного плоскости π.

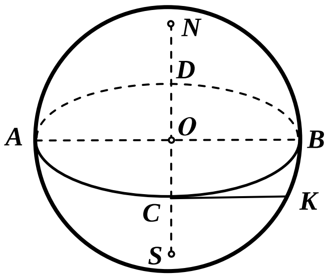


Рис. 89

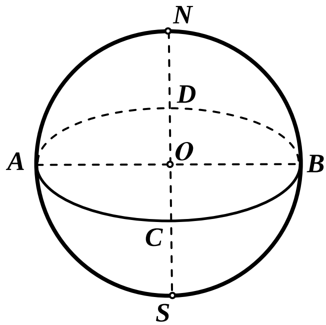


Рис. 90

Чтобы указать положение полюсов, вернемся к рисунку 88. Прямоугольные треугольники ON_0N и OD_0D на этом рисунке равны по гипотенузе и острому углу (углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поэтому $ON = DD_0$. Но в свою очередь $DD_0 = CK$, где CK – отрезок касательной к эллипсу, изображающему экватор (рис. 89).

Итак, наглядное изображение шара можно построить следующим образом:

1. Строим эллипс, который принимаем за изображение экватора, и его оси (на практике для их вычерчивания обычно используется трафарет эллипса).

2. Проводим окружность с центром в центре эллипса, радиус которой равен большой полуоси эллипса.

3. Строим отрезок касательной к эллипсу, параллельный его большой оси, а затем изображения полюсов.

На рисунке 90 показана достаточно типичная ошибка, когда полюсы изображаются на очерковой окружности, а экватор при этом изображен эллипсом.

В школьном курсе геометрии наиболее часто приходится изображать комбинации шара с другими геометрическими телами. Построение таких изображений удобно начинать с изображения шара.

Задача 6.1. Постройте изображение шара, вписанного в куб.

Решение. Строим изображение шара, его экватора и полюсов, соответствующих этому экватору (рис. 91, *а*).

Сечение поверхности куба плоскостью экватора шара – квадрат, равный грани куба и описанный около экватора. Диаметр шара, вписанного в куб, равен ребру куба. Поэтому шар касается оснований куба в полюсах шара.

На основании сказанного, искомое изображение можно выполнить следующим образом:

1. Строим изображение квадрата, описанного около экваториальной окружности. Этим изображением является параллелограмм, описанный около эллипса, изображающего экватор (рис. 64, *а*).

2. Выполняем параллельные переносы построенного параллелограмма, при которых точка пересечения его диагоналей переходит в точки, изображающие полюсы. Параллелограммы, полученные в результате этих переносов, будут изображать основания куба.

3. Строим изображения боковых ребер куба. Убираем лишние промежуточные построения, выделяем видимые и невидимые линии (рис. 91, *б*). □

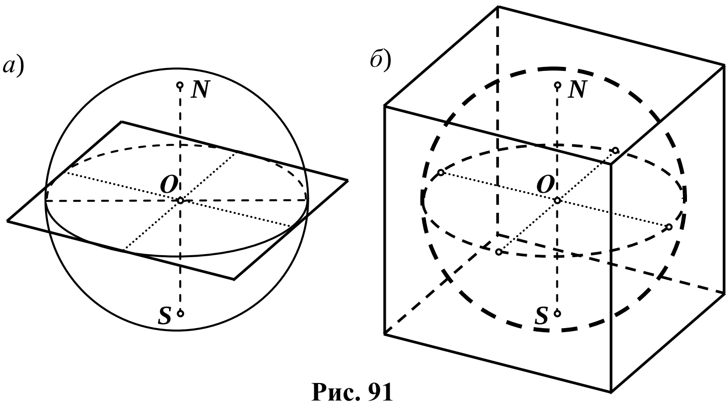


Рис. 91

6.2. *Изображение параллелей и меридианов*. Рассмотрим изображение параллелей и меридианов сферы, являющейся поверхностью шара. Напомним, что *параллелями* сферы называются ее сечения плоскостями, параллельными плоскости экватора. Сечения сферы плоскостями, проходящими через полярную ось, называются *меридианами*.

Через каждую точку сферы, отличную от полюса, проходит точно один меридиан и одна параллель. Каждый меридиан проходит через оба полюса.

Параллели и меридианы являются окружностями, поэтому также изображаются эллипсами.

Начнем с изображения параллелей. Параллель будет определена, если задать точку, в которой ее плоскость пересекает полярную ось. Поскольку плоскость параллели параллельна плоскости экватора, изображением параллели будет эллипс, подобный эллипсу, изображающему экватор.

Для построения этого эллипса рассмотрим сечение сферы (шара) плоскостью α, проходящей через полярную ось N_0S_0 перпендикулярно плоскости изображения (правая часть рис. 92). Построенное вспомогательное сечение позволяет легко найти малую ось эллипса, изображающего экватор, и изображения соответствующих ему полюсов.

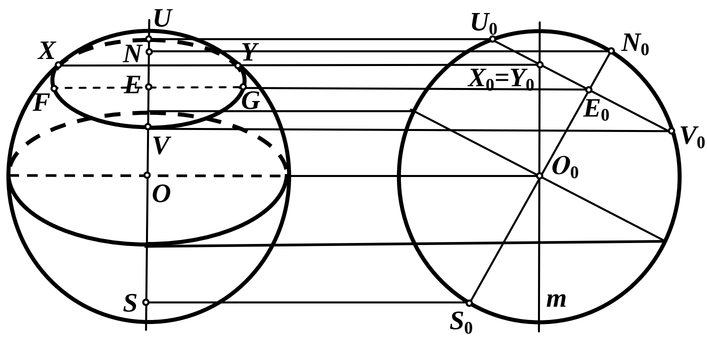


Рис. 92

Пусть параллель задана точкой E_0, а плоскость параллели пересекает окружность рассматриваемого сечения в точках U_0, V_0, тогда отрезок U_0V_0 перпендикулярен оси N_0S_0. Этот отрезок равен большой оси FG эллипса, являющегося изображением параллели. Малая ось UV эллипса находится с помощью проектирования точек U_0, V_0 на прямую NS. Чтобы построить точки X, Y касания эллипса, являющегося изображением параллели, с очерковой окружностью, находим точку пересечения отрезка U_0V_0 и прямой m, проходящей через точку O_0 параллельно прямой NS. Точки X, Y разделяют видимую и невидимую части изображения параллели.

При построении изображения параллели совсем не обязательно строить эллипс, являющийся изображением экватора. Более того, можно отдельно не выполнять и построение вспомогательного сечения (рис. 93).

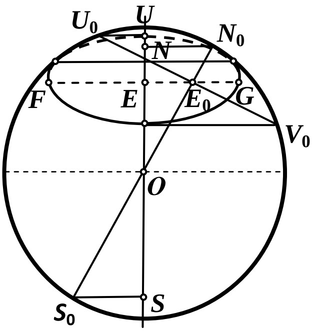


Рис. 93

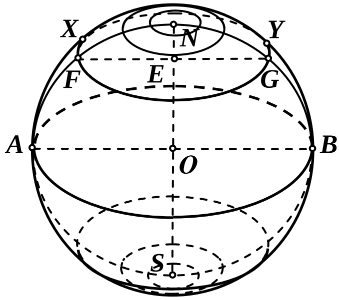


Рис. 94

Как можно увидеть на рисунке 94, в каждом из полушарий можно построить по эллипсу-параллели, которые касаются очерковой окружности только в одной точке. В верхнем полушарии изображения параллелей, лежащих севернее такой параллели, будут полностью видимыми, а в нижнем полушарии изображения параллелей, лежащих южнее такой параллели, – полностью невидимыми.

Задача 6.2. Постройте изображение цилиндра, вписанного в шар, если высота цилиндра равна радиусу шара.

Решение. Строим изображение очерковой окружности шара и на ее вертикальном диаметре отмечаем изображения полюсов (рис. 95). На этом же диаметре строим изображения центров O_1, O_2 оснований цилиндра. Из условия задачи $O_1O_2 = R$, где R – радиус шара. Поэтому $OO_1 = \, = OO_2 = \frac{R}{2}$, где O – центр очерковой окружности. Тем самым задано положение параллелей. В соответствии с рассмотренными правилами строим эллипс-изображение верхнего основания цилиндра. Эллипс,

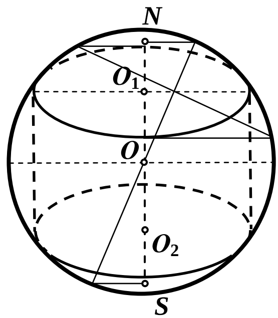


Рис. 95

изображающий нижнее основание, можно получить с помощью параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$. □

В заключение рассмотрим, как строится изображение меридианов, если задано изображение сферы, ее экватора и соответствующих ему полюсов.

Пусть задано изображение M точки M_0, через которую проходит изображаемый экватор (рис. 96). В оригинале диаметр M_0P_0 перпендикулярен полярной оси N_0S_0, поэтому отрезки MP , NS являются сопряженными диаметрами эллипса, изображающего рассматриваемый меридиан. Значит, эллипс – изображение меридиана – по этим сопряженным диаметрам можно построить.

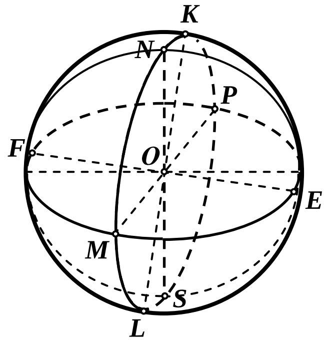


Рис. 96

При построениях меридиана «от руки» обычно дополнительно ищут точки K, L касания эллипса, являющегося изображением меридиана, с очерковой окружностью. Диаметр KL очерковой окружности для этого эллипса будет большой осью, причем $KL = K_0L_0$, а значит, диаметр сферы K_0L_0 параллелен плоскости проекции.

Точки K и L можно найти из следующих соображений. Построим диаметр FE эллипса-экватора, сопряженный диаметру MP. В оригинале $F_0E_0 \perp M_0P_0$, $F_0E_0 \perp N_0S_0$, поэтому диаметр FE перпендикулярен плоскости рассматриваемого меридиана. Отсюда следует, что $F_0E_0 \perp K_0L_0$, но тогда и $FE \perp KL$ (проектирование ортогональное). Точки K и L разделяют видимую и невидимую части изображения меридиана.

Задачи и упражнения

1. Постройте изображение конуса, вписанного в шар, если высота конуса равна: а) радиусу шара, б) половине радиуса шара, в) $\frac{3}{2}$ радиуса шара.

2. Постройте изображение шара, вписанного в цилиндр.

3. Выполните схематический рисунок сферы, касающейся ребер куба. Составьте план построения изображения этой комбинации тел.

4. Выполните схематический рисунок сферы, делящей ребра куба на три равные части. Составьте план построения изображения этой комбинации тел.

5. Постройте изображение шара, вписанного в конус.

6. Постройте изображение шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду ($n = 3, 4, 6$).

§ 7. Метрически определенные изображения

Как было отмечено во введении, существуют виды изображений, позволяющие по изображению фигуры восстановить форму и даже размеры фигуры-оригинала. Такими изображениями являются, например, изображения, выполненные методом Монжа. Возникает вопрос, можно ли восстановить форму оригинала по изображению фигуры, полученному с помощью параллельного проектирования и подобия. Оказывается можно. Рассмотрим, как это сделать.

Изображения фигуры, позволяющие восстановить ее форму, называют *метрически определенными*.

7.1. ***Метрическая определенность изображений плоских фигур.*** Опираясь на теорему 2, можно доказать следующий *достаточный признак метрической определенности изображения плоской фигуры*:

Если на чертеже, выполненном с помощью параллельного проектирования, дано изображение треугольника известной формы, то по изображению F любой плоской фигуры на этом чертеже можно восстановить ее форму. Иными словами, по изображению F фигура-оригинал F_0 восстанавливается с точностью до подобия.

Согласно теореме 1 треугольник ABC, заданный на плоскости изображения, может служить изображением любого треугольника $A_0B_0C_0$. Поэтому, когда дополнительно не оговорено, какую форму имеет треугольник-оригинал, его изображение метрически определенным не является. Однако если указать, что треугольник ABC служит, например, изображением равностороннего треугольника, то оно становится метрически определенным.

Для того чтобы сделать изображение F плоской фигуры F_0 метрически определенным, достаточно в плоскости фигуры F_0 каким-либо образом присоединить к ней (выделить в ней) треугольник известной формы, а в плоскости изображения задать его изображение.

Если, например, указать, что параллелограмм $ABCD$ является изображением квадрата, то треугольник ABD будет изображением прямоугольного равнобедренного треугольника. Поэтому такое изображение является метрически определенным.

Нетрудно доказать, что рассмотренные в § 2 изображения правильных многоугольников будут метрически определенными. Еще один пример метрически определенного изображения дает эллипс, принятый за изображение окружности. Если построить пару сопряженных диаметров AB и CD этого эллипса, то треугольник AOB, где O – центр эллипса, является изображением треугольника известной формы. Оригинал $A_0O_0B_0$ – прямоугольный равнобедренный треугольник

Метрические величины, определяющие форму оригинала F_0, принято называть *параметрами*. Система параметров называется независимой, если ни один из них не является функцией других.

Форма треугольника определяется двумя параметрами, это могут быть: два угла, угол и отношение заключающих его сторон, отношения двух сторон к третьей стороне. Для метризации изображения плоской фигуры F можно использовать и другие способы параметризации, например, задать в плоскости фигуры F изображения двух углов известной величины, которые не являются углами с соответственно параллельными сторонами. В этом случае в плоскости фигуры F легко построить треугольник, для которого восстанавливается форма его оригинала. При любом способе параметризации, для того чтобы превратить изображение F плоской фигуры F_0 в метрически определенное, требуется задать два независимых параметра.

Задача 7.1. Докажите, что изображение треугольника является метрически определенным, если задано изображение его ортоцентра (точки пересечения прямых, содержащих высоты треугольника).

Решение. Пусть треугольник ABC является изображением некоторого треугольника $A_0B_0C_0$, а точка H – изображением его ортоцентра H_0. Тогда прямые BK, CL, проходящие через точку H и вершины треугольника ABC, служат изображениями прямых, содержащих высоты треугольника $A_0B_0C_0$. Тем самым, по изображению можно указать три параметра (прямые углы), любые два из которых являются независимыми. Следовательно, рассматриваемое изображение является метрически определенным.

Как по этому изображению восстановить форму треугольника-оригинала? Это можно сделать, например, построив на стороне AB треугольник ABC_1, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$.

Предположим, что такой треугольник построен, т. е. $C_1L \perp AB$, $BK_1 \perp AC_1$ и $\frac{AK_1}{K_1C_1} = \frac{AK}{KC}$ (рис. 97). Решение задачи сводится к построению точки K_1. Эта точка удовлетворяет двум условиям: 1) из точки K_1 отрезок AB виден под прямым углом; 2) точка K_1 принадлежит геометрическому месту точек, делящих отрезки с концами в точке A и на прямой LC_1 в данном отношении $\frac{AK}{KC}$. Таким образом, с одной стороны, точка K_1 лежит на окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре. С другой стороны, она принадлежит прямой, проходящей через точку N, параллельно прямой LC_1 (N – точка, в которой прямую AB пересекает прямая, проходящая через точку K, параллельно LC).

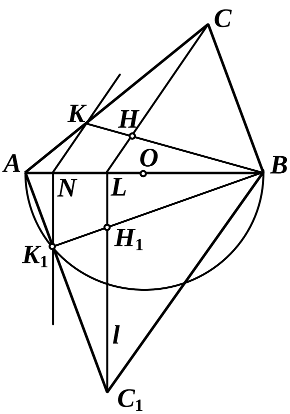


Рис. 97

Отсюда вытекает следующий ход построений:

1) строим перпендикуляр l к прямой AB в точке L,

2) на отрезке AB, как на диаметре, строим окружность ω;

3) через точку K проводим прямую n параллельно прямой CL, обозначаем $N = n \cap CL$;

4) через точку N проводим прямую m параллельно прямой l, обозначаем $K_1 = m \cap l$;

5) проводим прямую AK_1 и отмечаем точку $C_1 = AK_1 \cap \omega$;

6) строим сторону BC_1.

Докажите, что треугольник ABC_1 искомый. □

Примечания. 1. При метризации изображений с помощью треугольника и его ортоцентра выбор точки, изображающей ортоцентр, не может быть полностью произвольным. Действительно, ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри этого треугольника. Для прямоугольного треугольника он совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике лежит внутри угла, вертикального к тупому углу. Поэтому точка, являющаяся изображением ортоцентра, должна принадлежать заштрихованной фигуре на рисунке 98. При этом точки прямых AB, BC и CA ограничивающих эту фигуру, не могут служить изображением ортоцентра (за исключением точек A, B и C).

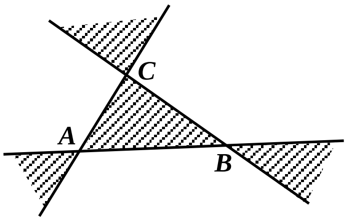


Рис. 98

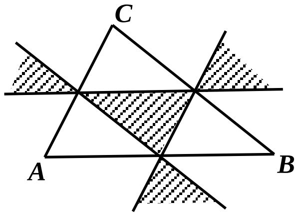


Рис. 99

2. Аналогично доказывается, что изображение треугольника будет метрически определенным, если задано изображение центра описанной около него окружности. Поскольку центр окружности, описанной около данного треугольника, является ортоцентром треугольника с вершинами в серединах сторон данного, то точка, являющаяся изображением центра описанной окружности, должна принадлежать заштрихованной фигуре на рисунке 99.

Когда изображение F плоской фигуры F_0 является метрически определенным, в плоскости изображения можно решать любые метрические задачи, относящиеся к оригиналу: строить изображения равных непараллельных отрезков, равных углов, перпендикулярных прямых и т. д.

Задача 7.2. Дано изображение окружности и стороны квадрата, лежащего в плоскости этой окружности. Постройте изображение самого квадрата.

Решение. Пусть эллипс γ – изображение окружности γ_0 и отрезок AB – изображение стороны A_0B_0 квадрата $A_0B_0C_0D_0$ (рис. 100).

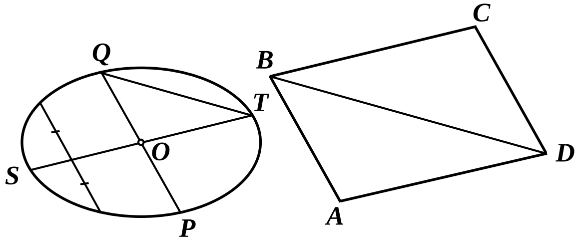


Рис. 100

Проводим диаметр PQ эллипса γ, параллельный AB. Строим сопряженный ему диаметр ST. Треугольник OQT является изображением прямоугольного равнобедренного треугольника $O_0Q_0T_0$, катеты которого параллельны сторонам квадрата $A_0B_0C_0D_0$, а гипотенуза – диагонали этого квадрата. При параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные, поэтому точка D, являющаяся изображением вершины D_0 квадрата, находится как пересечение прямой, проходящей через точку A параллельно ST, и прямой, проходящей через точку B параллельно QT. Строя на отрезках AB и AD параллелограмм, находим изображение вершины C_0. □

Задача 7.3. Дано изображение ABC правильного треугольника $A_0B_0C_0$ и изображения M, m точки M_0 и прямой m_0, лежащих в плоскости этого треугольника. Постройте изображение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно к прямой m_0.

Решение. В равностороннем треугольнике высоты совпадают с медианами, а при параллельном проектировании медианы треугольника $A_0B_0C_0$ изображаются медианами треугольника ABC. Если прямая m параллельна одной из сторон треугольника ABC, то решение очевидно. Рассмотрим случай, когда прямая m не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC (рис. 101).

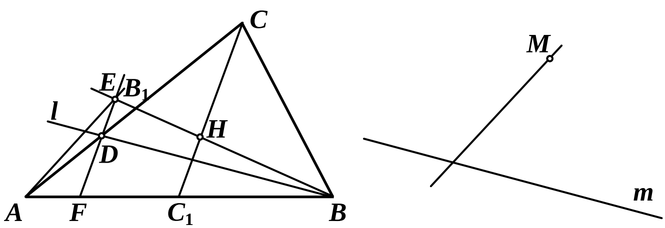


Рис. 101

Через вершину B проведем прямую l, параллельную прямой m; пусть $l \cap AC = D$. Найдем изображение E ортоцентра треугольника $A_0B_0D_0$. С одной стороны, отрезок BB_1 является изображением общей высоты треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_0B_0D_0$. С другой стороны, точка E лежит на прямой DF, параллельной CC_1. Поэтому $E = BB_1 \cap DF$ и AE – изображение высоты треугольника $A_0B_0D_0$, перпендикулярной стороне A_0D_0. Поскольку прямые m и l параллельны, перпендикуляры к этим прямым также параллельны. Следовательно, искомая прямая параллельна прямой AE. □

7.2. Метрическая определенность изображений пространственных фигур. Очевидно, что не всякое полное изображение пространственной фигуры является метрически определенным и, наоборот, всякое метрически определенное изображение пространственной фигуры должно быть полным. Из определения метрически определенного изображения и теоремы 4 вытекает *достаточный признак метрической определенности изображения пространственной фигуры*:

Если на чертеже, выполненном с помощью параллельного проектирования, дано изображение тетраэдра известной формы, то по полному изображению любой фигуры на этом чертеже можно восстановить ее форму, т. е. восстановить фигуру-оригинал F_0 с точностью до подобия.

Таким образом, чтобы сделать изображение F пространственной фигуры F_0 метрически определенным, можно выделить на нем некоторый четырехугольник $ABCD$ вместе с его диагоналями и указать форму тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$, который этот четырехугольник изображает.

В качестве примера рассмотрим изображение $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда. Если оговорить, что это – изображение куба, оно становится метрически определенным. Дополнительное условие позволяет заключить, что четырехугольник A_1ABD и его диагонали изображают правильную прямоугольную пирамиду. Если же сказать, что данное изображение является изображением прямоугольного параллелепипеда, оно еще не будет метрически определенным, т. к. восстановить форму тетраэдра, который изображает четырехугольник A_1ABD, полностью не удается. Действительно, можно только утверждать, что этот тетраэдр является прямоугольным, чтобы восстановить его форму потребуется дополнительно указать, например, отношения длин взаимно перпендикулярных ребер.

В общем случае форма тетраэдра определяется пятью независимыми метрическими величинами (параметрами). Это могут быть: величины трех плоских углов с общей вершиной и отношения длин двух ребер к длине третьего ребра, заключающих стороны этих углов; пять отношений длин пяти ребер тетраэдра к шестому ребру и т. д.

На практике при параметризации изображений пространственных фигур далеко не всегда сразу выделяют изображение тетраэдра известной формы. Процесс параметризации можно вести поэтапно, последовательно указывая величины изображенных углов и отношения длин непараллельных отрезков; при этом и в первом, и во втором случаях используется по одному параметру. Степень произвола в метрических построениях на изображениях пространственных фигур можно характеризовать величиной $5 - p$, где p – число использованных параметров, Изображение становится метрически определенным, если использованы все пять параметров.

Рассмотрим, например, изображение правильной четырехугольной пирамиды и подсчитаем число использованных в нем параметров. Из условия «правильная четырехугольная пирамида» можно заключить, что параллелограмм, изображающий ее основание, является изображением квадрата. При этом мы считаем, что любой из углов параллелограмма изображает прямой угол, а стороны этого угла – равные отрезки. Таким образом, изображение основания пирамиды является метрически определенным, и на него использовано 2 параметра. Далее, отрезок, соединяющий на изображении вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей параллелограмма, служит изображением высоты пирамиды оригинала. Поэтому каждый из углов, образованных этим отрезком с диагоналями параллелограмма, изображает прямой угол. Это означает, что на изображение высоты пирамиды использовано еще 2 параметра (само изображение высоты при этом можно не строить). Следовательно, на рассматриваемое изображение использовано $2 + 2 = 4$ параметра, а условие «правильная четырехугольная пирамида» форму пирамиды оригинала полностью не определяет. Чтобы изображение правильной четырехугольной пирамиды сделать метрически определенным требуется указать еще один параметр (угол, образованный боковым ребром с плоскостью основания; отношение высоты пирамиды к дине ребра основания и т. п.).

Аналогично показывается, что по четыре параметра расходуется на изображение цилиндра и конуса.

Рассмотрим примеры решения метрических задач на полных изображениях пространственных фигур. Так же, как при изображении сечений, условимся изображения точек обозначать теми же буквами, что и соответствующие точки-оригиналы.

Задача 7.4. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

Решение. На рисунке 102 дано изображение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Будем строить сечение, проходящее через вершину A основания перпендикулярно боковому ребру SC. Прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Пусть секущая плоскость пересекает ребро SC в точке E. Тогда ребро SC будет перпендикулярно, в частности, прямой AE, по которой секущая плоскость пересекает плоскость осевого сечения ASC.

Изображение правильной четырехугольной пирамиды является полным, но не является метрически определенным. Как отмечено выше, в нем израсходованы четыре параметра из пяти: два параметра определяют форму основания пирамиды (квадрат) и два параметра – ее высоту. Один параметр остался свободным. Поэтому точку E на ребре SC мы можем выбрать произвольно и считать, что угол AES является изображением прямого угла. При этом будут израсходованы все пять параметров, и изображение станет метрически определенным. Теперь форма пирамиды будет определена

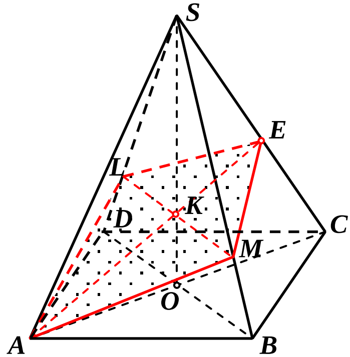


Рис. 102

и никакой произвол при выполнении дальнейших построений недопустим.

Высота пирамиды SO перпендикулярна плоскости основания, поэтому $SO \perp BD$. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, т. е. $AC \perp BD$. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BD$. Через точку K пересечения прямых SO и AE проведем прямую, параллельную BD. Эта прямая лежит в плоскости диагонального сечения BSD, точки ее пересечения с ребрами SB и SD обозначим M и L соответственно. Таким образом, $SC \perp BD$, $ML \| BD$; но прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна и к другой, поэтому $SC \perp ML$. Отсюда следует, что прямая ML лежит в искомой секущей плоскости. □

Задача 7.5. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой вдвое больше стороны основания. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

Решение. Задача принципиально отличается от предыдущей тем, что в ней изображение пирамиды является метрически определенным. Пятый параметр задает отношение длины бокового ребра к длине ребра основания, которое по условию равно 2. Теперь точку E на ребре SC нельзя выбрать произвольно.

В подобных случаях прибегают к так называемому *методу выносных чертежей*. Суть этого метода состоит в том, что на дополнительном чертеже восстанавливают форму каких-либо плоских элементов рассматриваемой пространственной фигуры (чаще всего, плоских сечений) и на этом оригинале решают соответствующую метрическую задачу. Затем, пользуясь полученными результатами, выполняют необходимые построения на изображении.

В нашем случае условиями задачи определена форма равнобедренного треугольника ASC. Его основание равно диагонали квадрата, лежащего в основании пирамиды, а боковая сторона вдвое больше стороны этого квадрата. На выносном чертеже (рис. 103, *б*) строим подобный ему треугольник $A_0S_0C_0$ и его высоту A_0E_0, опущенную из вершины A_0 на сторону S_0C_0. При параллельном проектировании и подобии сохраняется отношение трех точек прямой, поэтому точка E на изображении будет делить отрезок SC в том же отношении, в каком точка E_0 делит сторону S_0C_0 треугольника-оригинала.

Для построения точки E проводим произвольный луч с началом в точке S и откладываем на нем отрезки $SE_1 = S_0E_0$, $SC_1 = S_0C_0$. Точка E лежит на прямой, проходящей через точку E_1 параллельно прямой CC_1 (рис. 103, *а*).

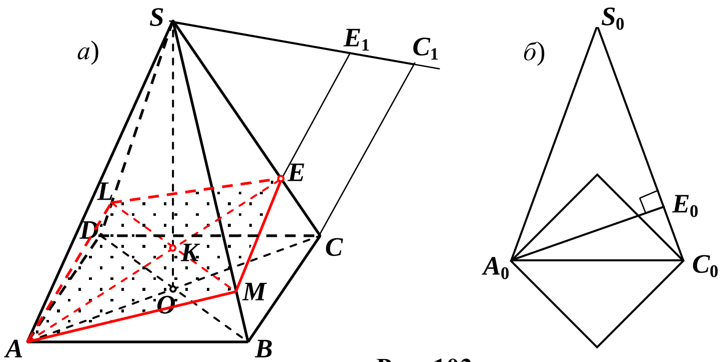


Рис. 103

Оставшиеся построения выполняются так же, как в предыдущей задаче. □

Задача 7.6. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте множество точек, одинаково удаленных от вершины A и центра O_1 верхнего основания.

Решение. Будем считать, что на рисунке 104, *а* дано изображение куба; такое изображение является метрически определенным. Поэтому искомое множество точек условиями задачи полностью определено.

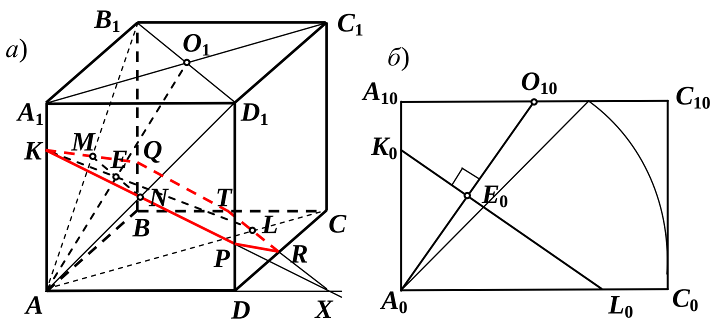


Рис. 104

Точки пространства, одинаково удаленные от двух данных точек A и O_1, лежат в плоскости α, проходящей через середину E отрезка AO_1, перпендикулярно этому отрезку. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости. Следовательно, чтобы построить искомое множество точек, достаточно указать две прямые, перпендикулярные AO_1, которые лежат в плоскости α, а затем построить сечение поверхности куба этой плоскостью.

С помощью теоремы о трех перпендикулярах доказывается, что прямая AO_1 перпендикулярна B_1D_1 (см. задачу 7.4). Поэтому прямая MN, проходящая через точку E и параллельная прямой B_1D_1, лежит в плоскости α и перпендикулярна AO_1 (точки M, N – центры граней AA_1D_1D, AA_1BB_1 соответственно).

Прямая AO_1 лежит в плоскости AA_1C_1C диагонального сечения куба, поэтому вторую перпендикулярную ей прямую можно построить в этой плоскости. Вычертим для этого на выносном чертеже (рис. 104, *б*) прямоугольник $A_0A_{10}C_{10}C_0$, имеющий форму диагонального сечения куба. Для упрощения дальнейших построений сторону A_0A_{10} прямоугольника выберем равной отрезку AA_1. Через середину E_0 отрезка A_0O_{10} проведем перпендикулярную ему прямую K_0L_0, где $K_0 \in A_0A_{10}$, $L_0 \in A_0C_0$.

На основном чертеже точка $K \in AA_1$ будет делить отрезок AA_1 в том же отношении, в каком точка K_0 делит отрезок A_0A_{10}. Для построения этой точки откладываем на AA_1 от точки A отрезок $AK = A_0K_0$. Проводим прямую KE; она будет изображением прямой, перпендикулярной AO_1 и лежащей в плоскости диагонального сечения AA_1C_1C. Обозначим $L = AK \cap AC$.

Строим отрезки, по которым секущая плоскость α пересекает грани куба. Сразу можно построить отрезки KQ, KP ($Q \in BB_1$, $P \in DD_1$); первый отрезок проходит через центр M грани AA_1B_1B, второй – через центр N грани AA_1D_1D. Точка L секущей плоскости лежит в плоскости нижнего основания куба. Находим точку X пересечения прямых AD и KP, она также принадлежит следу секущей плоскости на плоскости основания. Прямая XL пересекает BC, CD в точках T и R соответственно. Строим отрезки QT, PR. Ломаная $KPRTQ$ – искомое множество точек. □

Во многих случаях при решении метрических задач на изображениях, опираясь на известные свойства фигур, удается выполнить необходимые построения, не прибегая к выносным чертежам.

Задача 7.7. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол 30°. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположной грани.

Решение. Построим изображение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 105). Пусть секущая плоскость проходит через ребро AB, перпендикулярно грани CSD.

Заданный угол между высотой и боковой гранью является пятым параметром, который делает изображение пирамиды метрически определенным (см. задачу 7.4). Найдем условия, определяющие положение секущей плоскости.

Боковые грани пирамиды – равнобедренные треугольники с вершиной S. Поэтому основание L апофемы SL грани ASB является серединой ребра AB. Основание O высоты SO пирамиды находится в центре квадрата, лежащего в ее основании.

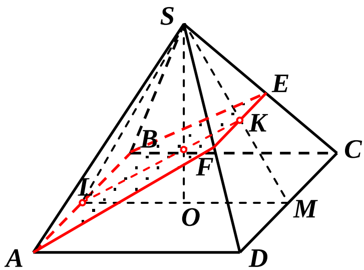


Рис. 105

Через апофему SL и высоту SO проведем сечение LSM пирамиды. Очевидно, что плоскость LSM перпендикулярна стороне AB основания. Отсюда следует, что угол LSM является углом между высотой и боковой гранью пирамиды, а треугольник LSM – равносторонний. По теореме о трех перпендикулярах высота LK этого треугольника перпендикулярна CD, а значит, перпендикулярна и плоскости CSD. Поэтому искомая плоскость проходит через прямую LK. Точка K при этом является серединой апофемы SM грани CSD. Поскольку прямая AB параллельна CD, она параллельна плоскости CSD. Следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость грани CSD по прямой EF, параллельной CD ($E \in SC$, $F \in SD$). Таким образом, построенное сечение является трапецией. Нетрудно доказать, что эта трапеция будет равнобочной. □

Задача 7.8. На изображении куба постройте изображение общего перпендикуляра скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба.

Решение. Проведем анализ задачи. Будем при этом, как условились, считать, что точки оригинала и их изображения на чертеже имеют одинаковые обозначения.

Пусть MN – общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей AD_1, DC_1 смежных граней AA_1D_1D, CC_1D_1D соответственно (рис. 106). Диагональ A_1D грани является ортогональной проекцией диагонали A_1C куба, при этом $A_1D \perp AD_1$. Поэтому в силу теоремы о трех перпендикулярах $AD_1 \perp A_1C$. Аналогично доказывается, что $DC_1 \perp A_1C$. Отсюда следует, что $MN \| A_1C$.

Далее, нетрудно доказать, что диагональ AD_1 перпендикулярна плоскости A_1B_1CD. Поэтому DE – ортогональная проекция диагонали DC_1 на плоскость A_1B_1CD, где $E = BC_1 \cap B_1C$. При этом ортогональном проектировании точка N проектируется в точку L отрезка DE, точка M – в точку F ($F = AD_1 \cap A_1D$), а общий перпендикуляр MN скрещивающихся диагоналей – в равный и параллельный ему отрезок FL. Отсюда $FL \perp DE$ (теорема о трех перпендикулярах).

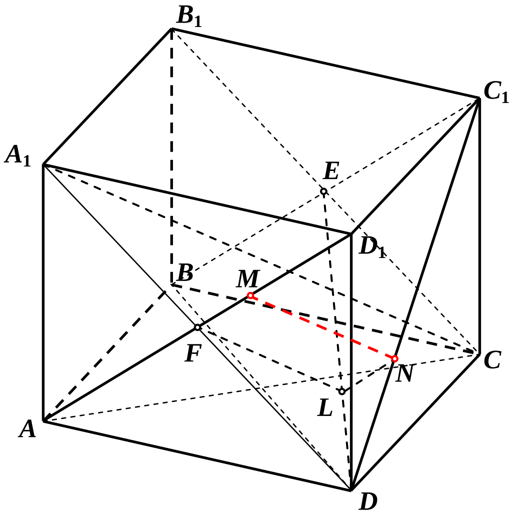


Рис. 106

Таким образом, чтобы построить изображение общего перпендикуляра MN скрещивающихся диагоналей AD_1, DC_1:

1) в плоскости A_1B_1CD строим прямую $FL \| A_1C$, $L \in DE$;

2) через точку L проводим прямую $LN \| AD_1$, $N \in DC_1$;

3) проводим прямую $NM \| A_1C$, $M \in AD_1$. □

В заключение рассмотрим примеры задач, в которых по изображению фигуры на метрически определенном чертеже требуется восстановить ее истинную форму.

Задача 7.9. Дано изображение правильного тетраэдра $ABCD$ и его сечение EDF плоскостью ($E \in AB$, $F \in BC$) (рис. 107). Найдите истинную форму сечения.

Решение. Из условия задачи следует, что изображение тетраэдра является метрически определенным.

Все грани правильного тетраэдра – равные равносторонние треугольники. Построим на ребре AC равносторонний треугольник AB_0C и будем его считать оригиналом грани тетраэдра. Проведем через точки B и B_0 прямую BB_0, а через точку E – параллельную ей прямую EE_0 ($E_0 \in AB_0$). Тогда $\frac{AE}{EB} = \frac{AE_0}{E_0B_0}$ и отрезок E_0F задает истинное положение и размеры отрезка EF на оригинале.

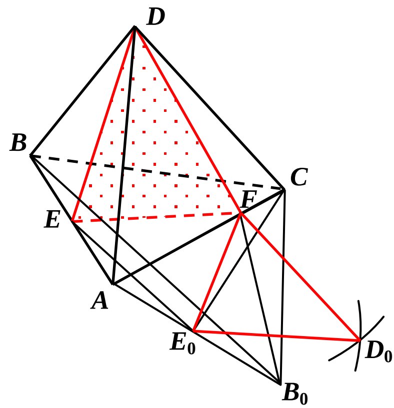


Рис. 107

Поскольку все грани тетраэдра равны, отрезок E_0C будет определять истинные размеры отрезка ED, а отрезок FB_0 – истинные размеры отрезка FD. На отрезке E_0F строим по трем сторонам треугольник E_0FD_0 ($E_0D_0 = E_0C$, $FD_0 = FB_0$). Этот треугольник задает истинную форму сечения EDF. □

Задача 7.10. Через вершины A и C_1 правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость так, что в сечении получился ромб с острым углом α. Найдите (постройте) истинную величину угла, образованного секущей плоскостью с плоскостью основания.

Решение. При изображении правильной четырехугольной призмы расходуется четыре параметра. Угол ромба является пятым параметром, задание которого превращает изображение призмы в метрически определенное.

Проведем анализ условий задачи. Пусть $AB_2C_1D_2$ – сечение призмы, являющееся ромбом с острым углом α (рис. 108, *а*). Из равенства сторон ромба следует равенство прямоугольных треугольников ABB_2, ADD_2, $C_1B_1B_2$ и $C_1D_1D_2$. Поэтому точки B_2, D_2 являются серединами боковых сторон BB_1, DD_1 призмы, а четырехугольник BB_2D_2D – прямоугольником. Отсюда следует, что секущая плоскость и плоскость основания призмы пересекаются по прямой, параллельной прямым BD, B_2D_2. Так как $AC \perp BD$, $AC_1 \perp B_2D_2$, угол CAC_1 является линейным углом двугранного угла между плоскостями сечения и основания.

Большая диагональ AC_1 ромба, лежащего в сечении, служит гипотенузой прямоугольного треугольника ACC_1, а диагональ AC квадрата, лежащего в основании призмы, – его катетом.

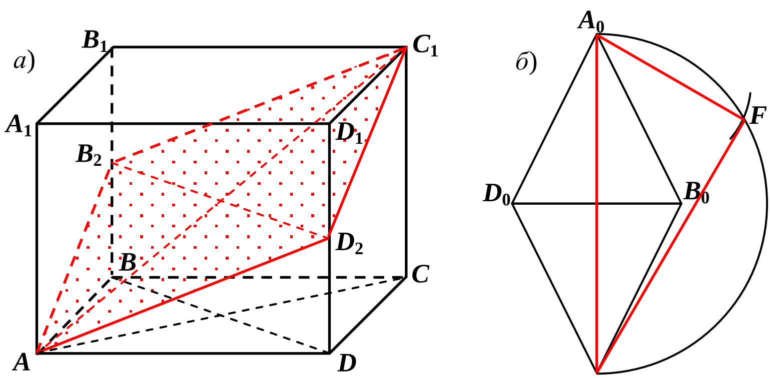


Рис. 108

Восстановим истинную форму треугольника ACC_1. Для этого на выносном чертеже построим ромб $A_0B_0C_0D_0$ с данным острым углом α, а затем на его большей диагонали – прямоугольный треугольник A_0FC_0, катет A_0F которого равен меньшей диагонали B_0D_0 этого ромба (рис. 108, *б*). Величина угла FA_0C_0 равна истинной величине угла, образованного секущей плоскостью с плоскостью основания. □

Задачи и упражнения

1. Докажите, что изображение треугольника является метрически определенным, если задано изображение центра описанной около него окружности. Дайте способ построения по этому изображению треугольника, подобного оригиналу.

2. Дано изображение окружности и угла, лежащего в плоскости окружности. Постройте изображение биссектрисы этого угла.

3. Дано изображение окружности и прямой, лежащей в плоскости окружности. Постройте изображение отрезка, лежащего на этой прямой и равного диаметру окружности.

4. Дано изображение ромба с острым углом в $45°$. Постройте изображение высоты этого ромба, опущенной из вершины тупого угла.

5. Дано изображение окружности и угла, лежащего в плоскости окружности. Найдите истинную величину этого угла.

6. Дано изображение квадрата. Постройте изображение равностороннего треугольника, одной из сторон которого является диагональ этого квадрата.

7. Дано изображение квадрата и отрезка, лежащего в плоскости этого квадрата. Постройте изображение другого квадрата, лежащего в плоскости первого, для которого заданный отрезок является изображением одной из его сторон. (Дайте план решения.)

8. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из произвольной точки ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на его диагональ AC_1.

9. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна стороне основания. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противоположной грани.

10. Дано изображение правильной треугольной призмы, все ребра которой равны. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом 45° к плоскости основания.

11. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB:AD = 3:2$. Постройте изображение общего перпендикуляра ребра AA_1 и диагонали B_1D.

12. Дано изображение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, у которой апофемы боковой грани в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в шестиугольник $ABCDEF$. Постройте изображение общего перпендикуляра стороны DE основания и апофемы грани SAB.

13. Постройте изображение общего перпендикуляра двух скрещивающихся высот граней правильного тетраэдра.

14. Постройте оригинал линейного угла для двугранного угла правильного тетраэдра.

15. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и ее сечения, проходящего через вершину A перпендикулярно боковому ребру SC. Найдите истинную форму боковой грани пирамиды.

§ 8. Изображение геометрических фигур в графическом редакторе пакета MS Office

8.1. *Интенсификация процесса выполнения геометрического чертежа*. Во введении была отмечена роль чертежа в ходе решения геометрических задач. Чтобы быть успешным при решении этих задач, необходимо уметь пользоваться чертежными инструментами, иметь навыки выполнения чертежей и рисунков от руки и, самое главное, обладать хорошо развитым пространственным мышлением. При построении чертежей к стереометрическим задачам надо, кроме того, иметь хотя бы элементарные знания о правилах выполнения изображений геометрических фигур в параллельной проекции.

Для того чтобы стать обладателем этих качеств, одного изучения готовых моделей и чертежей геометрических фигур и их комбинаций, как показывает практика, недостаточного. Еще более проблематично при таком подходе развить в себе способность видеть, когда при решении стереометрической задачи вместо проекционного чертежа можно обойтись изображением одного или нескольких сечений рассматриваемой в задаче геометрической конфигурации. Приобрести все нужные качества можно лишь в процессе самостоятельного выполнения различных проекционных чертежей и рисунков.

Вместе с тем на уроках и при выполнении домашних заданий вы уже убедились, что порой выполнение чертежа к стереометрической задаче может занять гораздо больше времени, чем все остальные этапы ее решения. При совместном решении новых типов задач вы также видели и то, что одни одноклассники строят чертежи быстрее, другие – медленнее. Учителю приходится постоянно ждать, когда нужные построения будут выполнены у всех учеников класса. Поэтому число задач, которое удается совместно решить на уроке геометрии, значительно меньше, чем число задач, решаемых на уроке алгебры и начал анализа.

Чтобы интенсифицировать процесс обучения решению стереометрических задач, в школьной практике широко используются задачи на готовых чертежах, а при построении чертежей – трафареты для вычерчивания наиболее часто встречающихся в задачах геометрических тел. В качестве примера на рисунке 109 даны трафарет для вычерчивания куба и изображения куба, выполненные с помощью этого трафарета. На рисунке 110 показаны трафарет и изображения правильного тетраэдра.

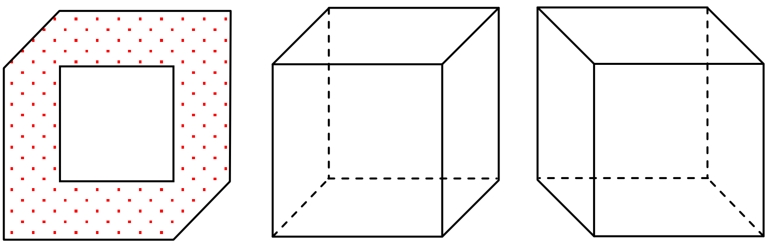


Рис. 109

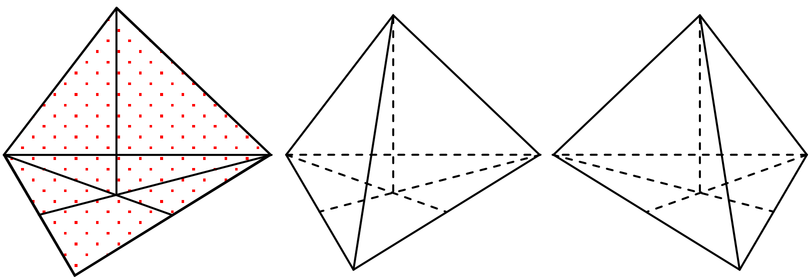


Рис. 110

Примеры других трафаретов, используемых для построения изображений многогранником, можно найти в приложении книги [3]. В § 4 было сказано, что при изображении круглых тел широко применяются трафареты нескольких подобных между собой эллипсов (рис. 72). Для построения изображений на классной доске трафареты обычно изготавливаются из фанеры; для построения чертежей в тетрадях используются такие же трафареты, только меньших размеров, выполненные из плотной бумаги, картона, пластика и т. п.

Применение трафаретов позволяет существенно сократить время выполнения чертежей и нивелировать индивидуальные различия в темпе их построения.

Компьютер, мультимедийные аппаратные средства и разнообразное программное обеспечение для работы с графикой позволяют еще более существенно интенсифицировать процесс обучения решению стереометрических задач.

Появились возможности во многом автоматизировать процесс создания геометрического чертежа, компактно его хранить и многократно использовать, а в случае необходимости вносить в имеющийся готовый чертеж необходимые коррективы. Применение на уроках геометрии проектора и интерактивной доски позволяет максимально эффективно расходовать время урока. Можно, например, используя готовые чертежи к стереометрическим задачам, обсуждать, какие необходимо выполнить на чертеже дополнительные построения, какие сечения потребуются для решения задачи и т. п. Интерактивная доска дает возможность не только обсуждать, но выполнять дополнительные построения, а затем сохранять полученные чертежи для последующего использования. Существуют самые разнообразные формы организации учебной деятельности с помощью распечаток готовых чертежей, хранящихся в памяти компьютера и т. д.

При использовании информационных технологий наибольший эффект для развития пространственного мышления попрежнему дает самостоятельное выполнение чертежей, но теперь в среде какого-либо редактора компьютерной графики. Школа вряд ли может себе позволить иметь дорогостоящий лицензионный программный продукт (такой, например как 3D Max). Для начального знакомства с принципами работы в графических редакторах такой программный продукт иметь вовсе не обязательно. Полученные теоретические знания позволяют выполнять вполне приемлемые для школьной практики чертежи на базе простейших графических редакторов.

Одним из таких редакторов является встроенный графический редактор пакета MS Office, входящий в пакет прикладных программ имеющейся практически во всех школах программы MS Word. (Кстати, все чертежи в этой книге выполнены именно в этом редакторе.) Построение сложных стереометрических чертежей в графическом редакторе пакета MS Office немыслимо без знания теоретического материала, рассмотренного в предыдущих параграфах. Поэтому, осваивая работу в этом графическом редакторе, вы будете не только развивать свое пространственное мышление и приобретать навыки в создании трехмерных объектов, но и получите прекрасную возможность использовать на практике полученные сведения по теории изображения геометрических фигур в параллельной проекции.

8.2. Возможности графического редактора пакета MS Office. С общими сведениями о работе в векторном графическом редакторе пакета MS Office большинство из вас познакомилось на уроках информатики. Поэтому вспомним только те команды и операции, которые потребуются для создания изображений геометрических фигур. (Описание дано для интерфейса программы MS Office Word 2007.)

Перед началом построения изображений геометрических фигур рекомендуется разместить на панели быстрого доступа команды **Фигуры** и **Параметры сетки** . Вывод на панель первой команды обеспечивает быстрый доступ к автофигурам, которые используются для построений. Вывод второй команды позволяет установить параметры, позволяющие более плавно управлять перемещением фигур на чертеже.

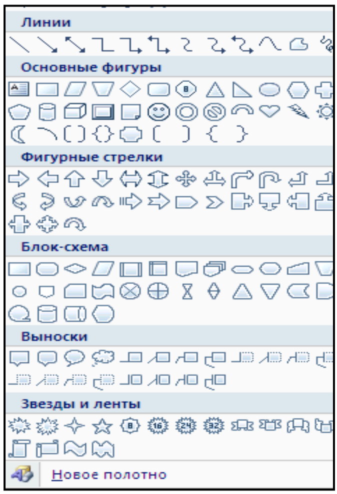


Рис. 111

После наведения курсора на окно **Фигуры** и щелчка левой клавишей мыши (ЛКМ) появляется панель с набором автофигур (рис. 111). Для выполнения любых геометрических построений потребуется лишь часть фигур из строк **Линии** и **Основные фигуры**. Перечислим эти фигуры.

Линии: – отрезок, – отрезок со стрелкой, – отрезок с двойной стрелкой, – гладкая кривая, – многозвенная ломаная.

Основные фигуры: – прямоугольник, – параллелограмм, – трапеция, – ромб, – восьмиугольник, – равнобедренный треугольник, – прямоугольный треугольник, – эллипс, – шестиугольник, – пятиугольник, – цилиндр, – прямоугольный параллелепипед, – дуга эллипса.

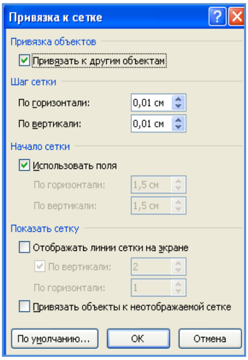


Рис. 112

Кроме того, для одновременного вычерчивания эллипса и его осей можно использовать фигуру $\oplus$, а для одновременного вычерчивания эллипса и его сопряженных диаметров, не являющихся осями, – фигуру $\otimes$ из строки **Блок-схема**.

После наведения курсора на окно **Параметры сетки** и щелчка ЛКМ появляется панель **Привязка к сетке** (рис. 112). Рекомендуется по горизонтали и по вертикали установить шаг сетки в 0,01 см. После этого нажать кнопку **По умолчанию**. Выбор малого шага позволит в дальнейшем достаточно точно устанавливать на чертеже выделенные объекты в нужное положение с помощью стрелок на клавиатуре.

Рассмотрим, как вычерчиваются линии и основные фигуры.

Вычерчивание линий. После открытия с помощью ЛКМ панели **Фигуры** в строке **Линии** выбираем вид линии, которую собираемся начертить. Когда кнопка выбранной линии изменит цвет, выполняем щелчок ЛКМ. В поле будущего изображения появляется крестообразный знак +. Устанавливаем этот знак в точку, из которой собираемся начать вычерчивание линии, и, удерживая ЛКМ, перемещаем его в нужном направлении.

При вычерчивании отрезков и отрезков со стрелками после остановки перемещения на экране появляется линия с зелеными маркерами на концах, например . В случае необходимости, установив знак + в один из концов, можно изменить длину и направление вычерченного отрезка.

При вычерчивании гладкой линии ее изгибание осуществляется после однократного щелчка ЛКМ; после двойного щелчка вычерчивание линии прекращается. Так же точно при создании ломаной после однократного щелчка ЛКМ начинается вычерчивание очередного звена ломаной, а после двукратного – процесс вычерчивания обрывается. И в том, и в другом случаях по окончанию вычерчивания по периметру прямоугольника, содержащего изображенную линию, появляется 8 синих маркеров и один зеленый (рис. 113). Синие квадратные маркеры позволяют сжимать (растягивать) линию по горизонтали и вертикали, а зеленый маркер – выполнять ее непрерывное вращение.

Рис. 113

Следует заметить, что при изображении замкнутых гладких кривых и ломаных происходит автоматическая заливка областей, ограниченных этими линиями, белым цветом.

Вычерчивание основных фигур. Вычерчивание наиболее часто встречающихся при построениях геометрических фигур выполняется аналогично. Эти автофигуры выбираются в строке **Основные фигуры**. Вместе с вычерченной фигурой по ее периметру также появляются маркеры, позволяющие управлять размерами и формой фигуры, и происходит автоматическая заливка областей, ограниченных фигурами.

Если при изображении прямоугольника, ромба удерживать на клавиатуре клавишу **Shift**, то вычерчивается квадрат. Если же клавишу **Shift** удерживать при изображении равнобедренного треугольника, прямоугольного треугольника, эллипса и дуги, то соответственно вычерчивается равносторонний треугольник, равнобедренный прямоугольный треугольник, окружность и дуга окружности. Аналогичным образом изображаются правильные пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник.

Удержанием клавиши **Shift** при построении параллелепипеда изображается параллелепипед, передняя грань которого является квадратом. Такой параллелепипед мы условились принимать за изображение квадрата.

Как выбрать толщину, тип и цвет линии? Прежде чем начать любые действия с автофигурами, необходимо их выделить, то есть указать, с какой именно фигурой или фигурами вы намерены выполнить действие. Для этого изображенная линия или фигура выделяется щелчком ЛКМ, при этом вокруг выделенного объекта должны появиться маркеры, а на панели быстрого доступа – команда **Средства рисования**. При открытии с помощью ЛКМ окна **Средства рисования** на экране появляется панель, содержащая инструменты для рисования (рис. 114).

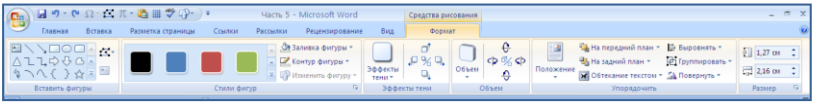


Рис. 114

После выбора в разделе **Стили фигур** команды **Контур фигуры** на экране открывается выносная панель, позволяющая путем указания соответствующих команд задать нужный цвет, толщину и тип линии (рис. 115).

Рис. 115

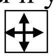
Выбор команды **Заливка фигуры** в разделе **Стили фигур** дает возможность отменить заливку фигуры или выбрать ее цвет. При построении геометрических чертежей, если нет специальной необходимости, рекомендуется всегда отменять заливку фигуры.

При выполнении сложных чертежей они создаются с помощью операций с линиями и основными фигурами. Рассмотрим эти операции.

Прежде всего более подробно остановимся на изменении размеров и формы автофигур. Как было сказано, при выделении изображенной автофигуры по периметру содержащего ее прямоугольника появляются маркеры синего цвета. Эти маркеры двух видов: угловые (круглые) и центральные (квадратные). Чтобы, *изменяя размеры, сохранить пропорции (форму) фигуры*, передвигают угловой маркер автофигуры, удерживая клавишу **Shift**. Для *изменения пропорций* объекта перетаскивают по вертикали или горизонтали один из центральных маркеров.

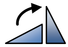
При вычерчивании дуги эллипса кроме синих и зеленого маркеров на концах дуги появляются желтые маркеры, которые позволяют изменять длину дуги.

Перемещение и копирование автофигур. Редактор обеспечивает возможность выполнять параллельный перенос и вращение изображенных автофигур, а также их отражение от горизонтальной и вертикальной осей. Во всех случаях перемещение автофигуры начинается с ее выделения.

После выделения фигуры и удержания на ней ЛКМ появляется крестообразный символ . Нажатие ЛКМ с одновременным перемещением мыши приведет к параллельному переносу выделенного объекта. Если при этом на клавиатуре нажать и удерживать клавишу **Ctrl**, то одновременно с перемещением выполняется копирование объекта.

Выделенный объект может быть также перемещен при помощи четырех клавиш со стрелками, расположенных на клавиатуре.

Для выполнения вращения фигуры курсор наводится на зеленый маркер, он при этом принимает вид . После щелчка ЛКМ происходит еще одно изменение вида курсора, он будет выглядеть так  . Теперь можно выполнять непрерывное вращение фигуры, устанавливая ее в нужное положение.

Чтобы осуществить отражение фигуры от горизонтальной или вертикальной оси и выполнить поворот на заданный угол, обращаемся к команде  **Повернуть** из раздела **Упорядочить** инструментальной панели (рис. 114). При щелчке ЛКМ по команде **Повернуть** открывается выносная панель, на которой указывается вид требуемого перемещения (рис. 116).

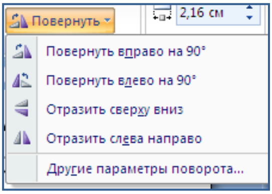


Рис. 116

При обращении в меню к строке **Другие параметры поворота** можно задать величину угла поворота (рис. 117). На рисунке задан поворот на угол 60° по часовой стрелке.

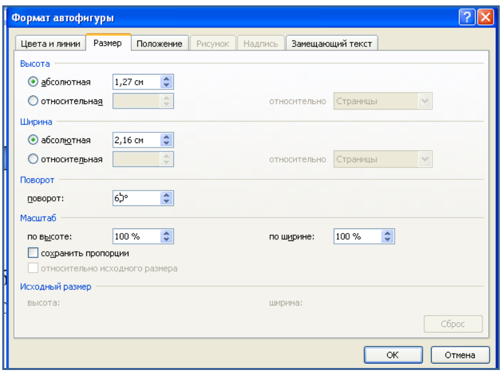


Рис. 117

Перемещение планов. При создании сложных геометрических чертежей составляющие их элементы, как правило, располагаются в различных графических слоях. Фигура, находящаяся в верхнем слое, при наложении закрывает фигуру, который находится в нижнем слое. На рисунке 118 показаны треугольник, прямоугольник и круг, которые изображены в перечисленной последовательности. Прямоугольник частично закрывает треугольник, а круг – прямоугольник.

Для изменения расположения выделенной фигуры относительно других фигур используются команды **На передний план**  и **На задний план** , входящие в диалоговое окно **Упорядочить** панели **Средства рисования**.

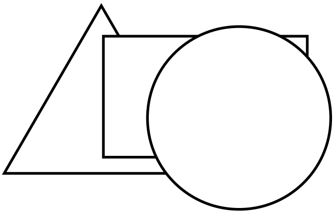


Рис. 118

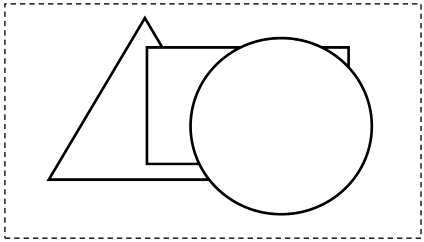


Рис. 119

Группировка объектов. В редакторе предусмотрена возможность в ходе выполнения чертежа объединять отдельные геометрические элементы в единое целое. Группировка всех составляющих элементов чертежа обычно является и заключительным этапом его выполнения. С объектом, полученным в результате группировки, можно в дальнейшем работать так же, как с основными фигурами, т. е. перемещать, копировать, менять размеры, пропорции, объединять в группы. В графическом редакторе MS Office Word 2007, например, после выделения такого объекта появляются маркеры, позволяющие управлять его размерами и положением. Эти возможности существенно сокращают время создания сложных чертежей.

Как выполняется группировка фигур? Для этого необходимо одновременно выделить все фигуры, подлежащие группировке. Это можно сделать двумя способами:

1. Удерживая клавишу **Shift**, последовательно выделить группируемые объекты, щелкая на них ЛКМ.

2. Выделить одну из группируемых фигур, затем последовательно выбрать команды **Средства рисования ► Главная ►**  **Выделить ►**  **Выбор объектов**. После этого, удерживая левую клавишу мыши и передвигая мышь, охватить поя-

вившимся пунктирным прямоугольником все объекты группировки сразу (рис. 119).

Выделив группируемые фигуры, обращаемся к окну **Группировать** раздела **Упорядочить** панели инструментов для рисования (рис. 120). После выбора в меню команды **Группировать** происходит группировка выделенных объектов. Чтобы разгруппировать сгруппированный объект, после его выделения в меню выбирается команда **Разгруппировать** (рис. 121).

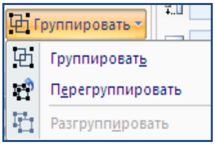


Рис. 120

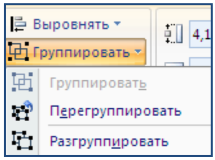


Рис. 121

Создание надписей. Геометрические чертежи, используемые при решении задач, включают в себя буквенные обозначения точек, прямых, отрезков и т. д. Для создания этих текстовых элементов в строке **Основные фигуры** панели для создания автофигур имеется специальная команда  **Надпись** (рис. 111). Выделив геометрический объект, ЛКМ рядом создают элемент **Надпись**, представляющий собой прямоугольник, в поле которого вставляется текст будущей надписи, и окружающие его маркеры. После этого на панели быстрого доступа появляются команды **Работа с надписями ► Формат**. Перед созданием обозначений для элементов геометрического объекта рекомендуется в диалоговом окне **Стили надписей** с помощью команд **Заливка фигуры**, **Заливка контура** (рис. 122) последовательно выбрать: **Нет заливки**, **Нет контура**. Если этого не сделать, надпись будет находиться в прямоугольной рамке, а прямоугольник, который автоматически заливается белым цветом, будет закрывать некоторые элементы чертежа. Кроме того, прежде чем вводить в поле надписи необходимый текст, рекомендуется также обычным образом установить его параметры (язык, шрифт, размер). В случае необходимости перетаскиванием маркеров размер текстового поля подгоняется под размер содержащегося в нем текста.

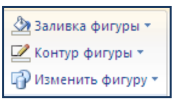


Рис. 122

Надпись, помещенная в поле геометрического чертежа, с помощью ЛКМ может перемещаться по плоскости чертежа, а также копироваться одновременным удержанием ЛКМ и клавиши **Ctrl** на клавиатуре. Чтобы отредактировать созданный текст, необходимо щелкнуть на надписи ЛКМ и при появлении текстового курсора внести необходимые изменения.

Одновременно выделив геометрический чертеж и созданные сопроводительные надписи, их можно объединить в единый цельный объект с помощью команды **Группировать** из окна **Средства рисования**.

Вставка чертежа в текст. При создании математических текстов можно:

– выполнять нужные геометрические чертежи по ходу написания текста,

– вставлять в текст готовые чертежи из других документов.

И в первом, и во втором случае необходимо привязать чертеж к тексту, тогда при редактировании документа он будет сохранять свое положение относительно текста. В первом случае перед привязкой чертежа следует сгруппировать все его элементы в целостный объект.

Привязка чертежа к тексту осуществляется с помощью команды **Обтекание текстом** (раздел **Упорядочить** панели **Средства рисования**). После щелка ЛКМ по этой команде открывается диалоговое окно, в котором выбирается требуемый вид обтекания (рис. 123). На практике при работе с геометрическими чертежами требуются лишь два вида обтекания объекта: **Вокруг рамки** и **Сверху и снизу**.

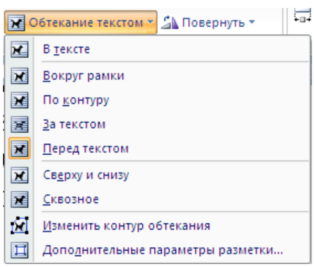


Рис. 123

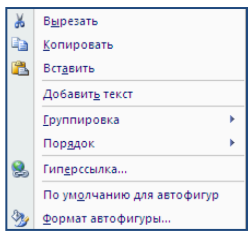


Рис. 124

Редактирование чертежа с помощью правой клавиши мыши. Использование правой клавиши мыши (ПКМ) обеспечивает быстрый доступ к командам для редактирования и перемещения созданного изображения и/или его элементов.

При наведении курсора на геометрический объект и щелчке на нем ПКМ появляется диалоговое окно (рис. 124). Если объект включает сопроводительные надписи, то строка **Добавить текст** отсутствует.

Рассмотрим возможности для редактирования многослойного чертежа с помощью команд из строки **Порядок**. После щелчка ЛКМ по этой строке открывается диалоговое окно, представленное на рисунке 125. При построении геометрических чертежей потребуются четыре первые команды. С командами **На передний план**, **На задний план** мы уже знакомы. Первая из них перемещает слой, на котором расположен выделенный объект, на самый верх, а вторая – на самый низ. Использование же команд **Переместить вперед** и **Переместить назад** открывает дополнительные возможности для редактирования. Они меняют местами соседние слои и позволяют перемещать выделенный объект на один уровень вверх и вниз соответственно.

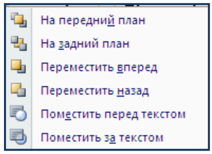


Рис. 125

При выделении объекта и щелчка ЛКМ по строке **Формат автофигуры** окна на рисунке 124 появляется новое диалоговое окно (рис. 126). Открывая в нем окно **Цвета и линии**, можно

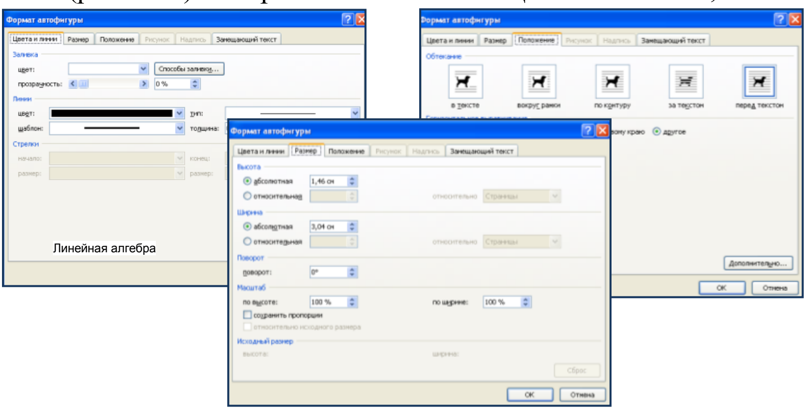
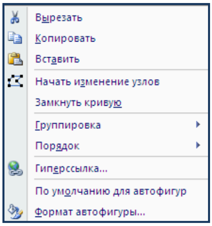


Рис. 126

изменить цвет, толщину и тип линий объекта. С помощью окна **Размер** можно независимо друг от друга менять высоту и ширину объекта, изменить его масштаб, задать поворот на заданный угол, а с помощью окна **Положение** – указать вид обтекания объекта текстом.

Опишем, наконец, редактирование гладких кривых и ломаных. При выделении этих линий и последующего щелчка на них ПКМ открывается диалоговое окно (рис. 127), содержащее строки **Начать изменение углов** и **Замкнуть кривую** или **Разомкнуть кривую** (строка **Замкнуть кривую** появляется, если выделенная линия незамкнута, а строка **Разомкнуть кривую**, если она замкнута). После щелчка ЛКМ по строке **Начать изменение узлов** на выделенной кривой (ломаной) узловые точки, в которых линия меняет свое направление, будут отмечены маленькими черными квадратами (рис. 128). Если поместить курсор в узловую точку, появится знак , а после повторного щелчка ПКМ – новое диалоговое окно, содержащее в своем меню



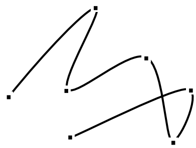


Рис. 127 **Рис. 128**

команды **Добавить узел**, **Удалить узел**, **Автоузел**, **Гладкий узел**, **Прямой узел**, **Угловой узел**. На рисунках 129, 130 в качестве примера показаны результаты применения к кривой (рис. 128) команд **Добавить узел**, **Удалить узел** соответственно.

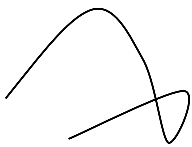


Рис. 129 **Рис. 130**

При наведении курсора на дугу кривой с концами в смежных узлах (на звено ломаной) и второго щелчка ПКМ появляется диалоговое окно с командами **Добавить узел**, **Прямой сегмент**, **Искривленный сегмент**, **Завершить изменение узлов**.

Пример действия на кривую (рис. 128) команды **Прямой сегмент** дан на рисунке 131. Результат применения команды **Замкнуть кривую** к той же кривой показан на рисунке 132.

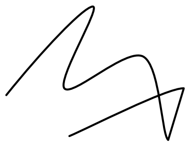


Рис. 131

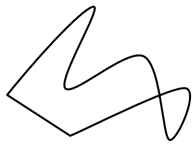


Рис. 132

В заключение заметим, что любые построения, выполненные до закрытия документа, можно отменить. Для отмены последнего действия необходимо, как обычно, нажать кнопку  **Отменить действие**. Чтобы возвратить результат последнего отмененного действия, нажмите кнопку  **Вернуть действие**. Для удаления фигуры требуется выделить эту фигуру и нажать на клавиатуре клавишу **Delete**.

8.3. ***Построение изображений геометрических фигур*.** Рассмотрим примеры построения изображений в параллельной проекции плоских и пространственных фигур с помощью графического редактора пакета MS Office.

Изображение правильных многоугольников. В школьном курсе геометрии среди вычислительных стереометрических задач наиболее часто встречаются задачи, в которых рассматриваются правильные призмы и пирамиды. При выполнении чертежей к этим задачам приходится строить изображения правильных многоугольников, лежащих в основаниях этих многогранников. На примере правильного шестиугольника обсудим различные способы построения его изображения в параллельной проекции.

Для изображения правильного шестиугольника имеется специальная команда в строке **Основные фигуры** в диалоговом окне **Фигуры**. Чтобы построить правильный шестиугольник, нужно после щелчка ЛКМ по соответствующему значку указать место, где будет выполняться изображение, а при перемещении указателя дополнительно удерживать на клавиатуре клавишу **Shift** (рис. 133, *а*). Если просто перемещать указатель, то сразу получим изображение правильного шестиугольника в параллельной проекции (рис. 133, *б*). Это же изображение можно получить, если выделить правильный шестиугольник, а затем изменить его форму. Форму правильного многоугольника можно менять двумя способами: а) перемещая желтый маркер, б) сдвигая по горизонтали и вертикали синие центральные маркеры. В случае необходимости многоугольник можно повернуть с помощью зеленого маркера (рис. 133, *в*).

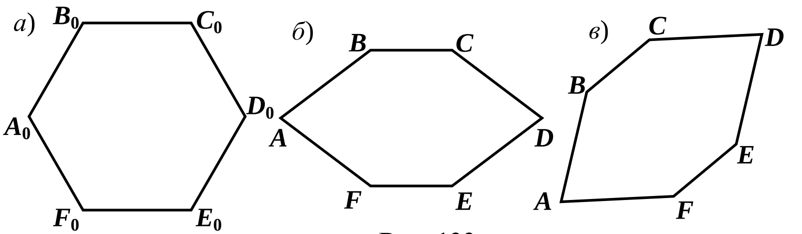


Рис. 133

При построении изображений призм и пирамид вместе с многоугольниками, лежащими в основании, обычно приходиться изображать их диагонали. Сделать это можно с помощью команды для изображения отрезков из строки **Линии** (рис. 134).

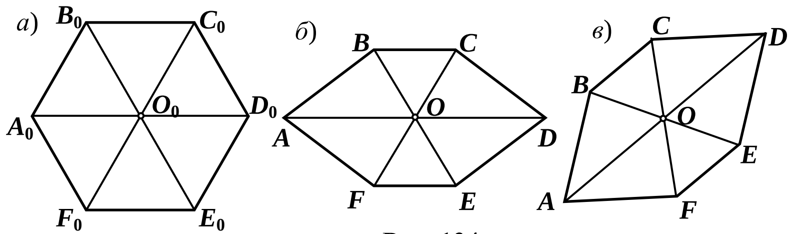


Рис. 134

Чтобы выделить на чертеже точку (например, центр правильного многоугольника), строим окружность. После щелчка по ее изображению ПКМ обращаемся к строке **Формат автофигуры** и устанавливаем нужные размеры.

В чем недостатки выполненных изображений? Во-первых, изображение правильного шестиугольника в параллельной проекции является не самым общим. Оно получено в результате сжатий плоскости к вертикальной и горизонтальной прямым, поэтому отрезки AB, AF, CD и DE равны между собой (рис. 134, *б*). Во-вторых, такие изображения неудобны для дальнейшего использования. При построении изображений нижнего основания призмы и основания пирамиды часть сторон многоугольника, лежащего в основании, будет невидимой. Эти стороны нужно изобразить штриховой линией, однако при использовании автофигур тип линий можно изменить лишь у всей автофигуры.

Поэтому гораздо целесообразней строить изображения правильных многоугольников без использования автофигур в итоговом изображении. Это можно сделать, например, следующим образом.

1. Используя строку **Основные фигуры**, строим вспомогательный параллелограмм (рис. 135, шаг 1).

2. Удерживая клавишу **Ctrl**, выполняем параллельный перенос построенного параллелограмма (шаг 2).

3. «Накладываем» отрезки на стороны параллелограмма и строим третью непараллельную им сторону шестиугольника (шаг 3).

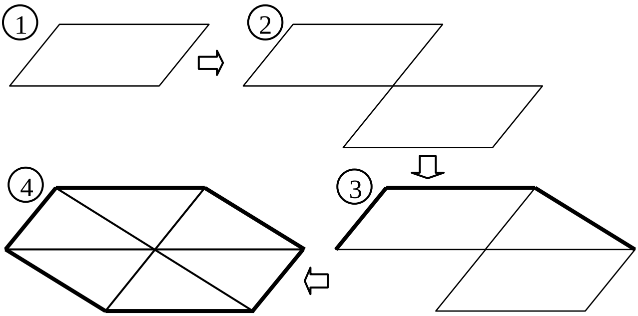


Рис. 135

4. Выполняя параллельный перенос, строим противоположные стороны шестиугольника, удаляем вспомогательные параллелограммы. Если требуется, строим диагонали шестиугольника (шаг 4).

5. Группируем построенные отрезки.

Теперь в случае необходимости построенный шестиугольник можно параллельно переносить и вращать как единое целое, а, разгруппировав изображение, выбрать нужный тип линий для его сторон.

В дальнейшем с помощью построенного шестиугольника можно легко и быстро выполнять изображение правильной призмы или пирамиды. В качестве примера рассмотрим построение изображения правильной шестиугольной призмы.

1. Копируем шестиугольник на рисунке 135.

2. Вставляем копию в поле будущего изображения, принимаем ее за изображение верхнего основания призмы (рис. 136, шаг 1).

3. Удерживая клавишу **Ctrl**, выполняем параллельный перенос построенного шестиугольника и принимаем его образ за изображение нижнего основания призмы (рис. 136, шаг 2).

4. Строим изображение одного из боковых ребер призмы (шаг 3).

5. С помощью параллельного переноса строим изображения остальных ребер призмы (шаг 4).

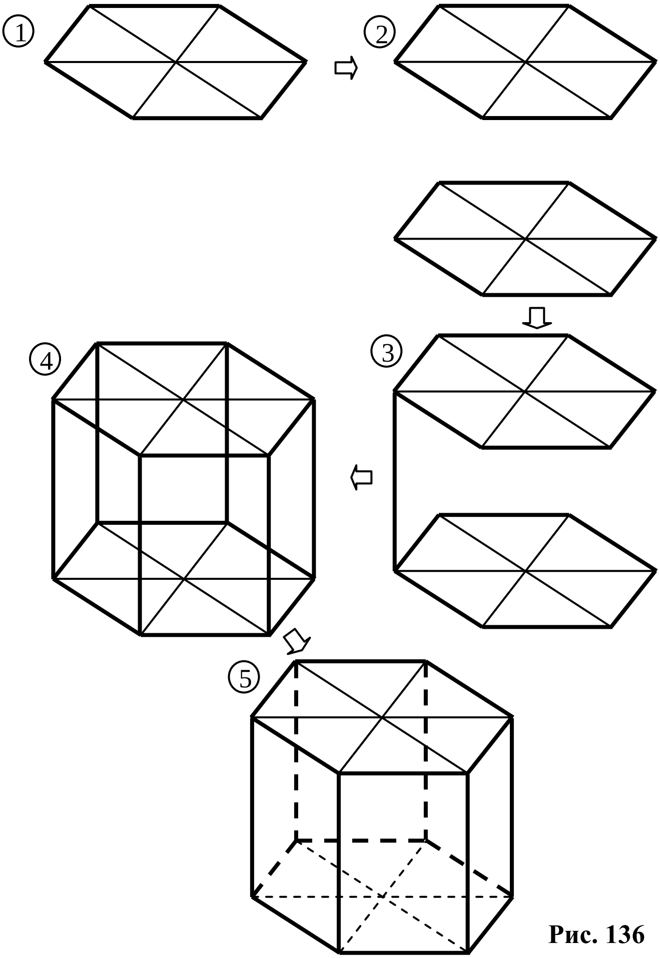


Рис. 136

6. Разгруппировываем шестиугольник, изображающий нижнее основание.

7. Удерживая клавишу **Shift**, выделяем ребра и диагонали основания призмы, которые являются невидимыми. В меню диалогового окна **Контур фигуры** выбираем команду **Штрихи** и меняем тип выделенных линий (шаг 5).

8. Группируем построенное изображение. Перед группировкой можно удалить ненужные для решения задачи диагонали оснований призмы или, наоборот, отметить центры оснований и построить изображение соединяющей их высоты призмы.

Для того чтобы быстро строить изображения правильных призм и пирамид, рекомендуется создать собственную библиотеку чертежей геометрических фигур, одним из разделов которой является набор изображений в параллельной проекции правильных многоугольников. Для хранения такой библиотеки удобно создать отдельную папку.

Изображение окружности. В следующий раздел библиотеки включим изображения в параллельной проекции окружности и ее перпендикулярных диаметров (рис. 137). Верхняя часть правого эллипса является штриховой линией, что позволяет использовать данную автофигуру для построения нижнего основания цилиндра, основания конуса и экватора сферы. Эти изображения будут использоваться как готовые базовые элементы при построении чертежей круглых тел и их комбинаций. С их помощью можно гораздо быстрей, чем от руки, строить изображения цилиндра, конуса, сферы, ее экватора и соответствующих ему полюсов.

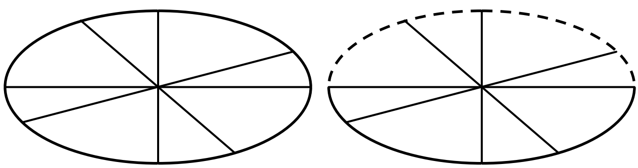


Рис. 137

Пропорционально изменяя размеры рисунка по горизонтали и вертикали, из этих эллипсов можно получать подобные им эллипсы, как большего, так и меньшего размера, что дает возможность быстро строить изображения усеченного конуса.

Для построения изображений комбинаций правильных многогранников и круглых тел вместе с эллипсом изображены его оси и пара сопряженных диаметров, не являющихся главными.

Удобно использовать следующий алгоритм создания описанных изображений:

1. Обращаемся к строке **Основные фигуры** и, удерживая клавишу **Shift**, строим окружность.

2. С помощью кнопки **Заливка фигуры** выбираем команду **Нет заливки**.

3. Используя строку **Линии**, строим горизонтальный и вертикальный диаметры окружности.

4. Строим еще одну пару перпендикулярных диаметров (рис 138, *а*). Можно сначала построить один диаметр, затем его скопировать и повернуть на 90°.

5. Выделив все построенные фигуры, с помощью команды **Группировать** объединяем их в один объект.

6. С помощью кнопки **Контур фигуры** устанавливаем нужную толщину линий.

5. Сжимаем курсором сгруппированную фигуру к горизонтальному диаметру окружности (рис. 138, *б*).

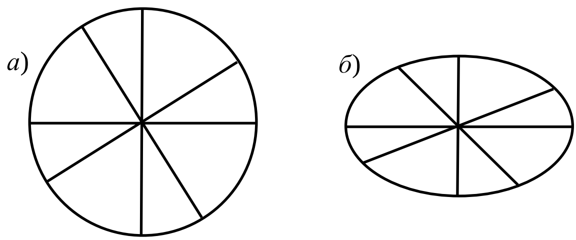


Рис. 138

Для построения правого трафарета на рисунке 137 окружность «собирается» из четырех одинаковых дуг. Первая дуга строится с удержанием клавиши **Shift**, а остальные «тиражируются» из нее с помощью команды **Повернуть**. Можно также сначала вычертить четверть окружности, а затем продолжить ее, используя желтый маркер. С помощью команды **Штрихи** верхняя часть окружности выбирается штриховой.

Изображение вписанных и описанных многоугольников. Для более быстрого построения чертежей к задачам на комбинации многогранников и круглых тел можно сразу «заготовить» изображения правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее. Для их создания удобно использовать уже имеющееся изображение окружности и ее перпендикулярных диаметров (рис. 137). Процесс построения вписанных и описанных многоугольников описан в пункте 4.4.

Комбинации изображений окружности и правильных многоугольников могут составить еще один раздел вашей библиотеки геометрических чертежей.

Изображение геометрических тел. В библиотеке автофигур редактора содержатся только две команды для построения геометрических тел. Первая команда позволяет строить изображения прямоугольного параллелепипеда, в частности, куба. При построении происходит автоматическая заливка изображения (левая часть рисунка 139). Если даже отменить заливку фигуры (правая часть рисунка), то при использовании такого изображения в ходе выполнения геометрических чертежей его все равно приходится дополнять изображением невидимых ребер параллелепипеда. Поэтому, как показывает практика, данную автофигуру лучше использовать лишь в качестве вспомогательного средства построения. Можно, например, «наложить» отрезки на изображения трех ребер, выходящих из одной вершины, а затем, выполняя их параллельный перенос и выбирая нужный тип линий, построить изображение параллелепипеда. Вспомогательный параллелепипед после этого удаляется.

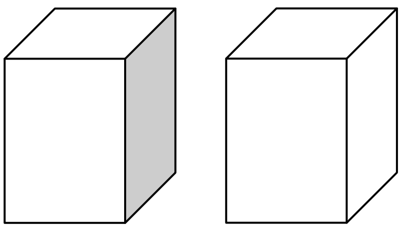


Рис. 139

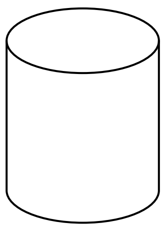


Рис. 140

Так же точно изображение цилиндра, построенное с использованием автофигуры (рис. 140), приходится дополнять изображением невидимой части окружности нижнего основания. Поэтому более рационально строить изображение цилиндра, применяя описанные выше трафареты эллипса.

Для того чтобы редактор действительно стал эффективным инструментом для построения стереометрических изображений, в частности изображений геометрических тел и их комбинаций, создаваемую библиотеку рекомендуется пополнить разделом, содержащим изображения круглых тел и наиболее часто встречающихся в задачах многогранников. Формирование этого раздела можно начать с изображений куба и правильной треугольной пирамиды (рис. 141). Выполняя в дальнейшем изображения других многогранников, их также можно включать в этот раздел библиотеки.

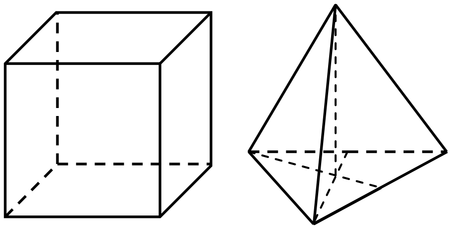


Рис. 141

На изображениях цилиндра, конуса и усеченного конуса рекомендуется сразу построить изображение высоты, а на изображении шара – кроме экватора, полюсов, соответствующих этому экватору (рис. 142).

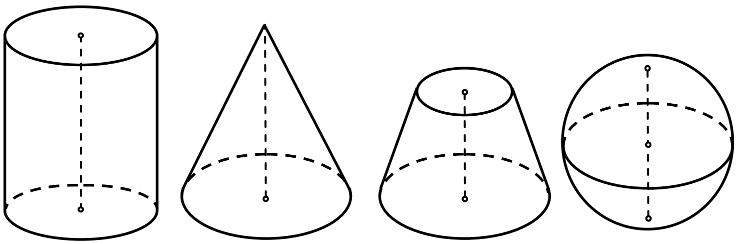


Рис. 142

В последующем подобные изображения достаточно просто подгоняются под условия конкретных задач.

Заливка сечений геометрических тел плоскостями. Иногда для большей наглядности выполняют заливку сечений геометрических тел плоскостями. На рисунке 143 дано изображение сечения $ABCDEF$ плоскостью усеченной пирамиды.

На примере этого изображения опишем, как выполнить заливку сечения.

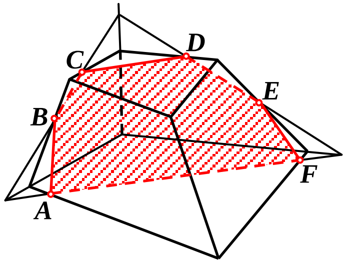


Рис. 143

1. В строке **Линии** выбираем команду для построения ломаной и, щелкая ЛКМ в точках пересечения плоскости сечения и ребер многогранника, накладываем ломаную на стороны сечения.

2. В меню окна **Контур фигуры** выбираем команду **Нет контура**.

3. В меню окна **Заливка фигуры** выбираем команду **Узор** и щелчком ЛКМ по этой команде открываем диалоговое окно, в котором представлены возможные способы заливки (рис. 144).

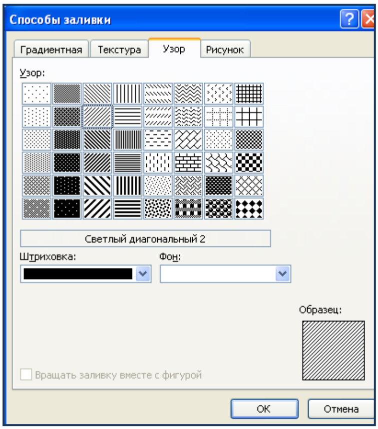


Рис. 144

4. ЛКМ выбираем способ заливки и нажимаем команду ОК.

5. Перемещаем залитый многоугольник на задний план.

На рисунке 143, кроме того, отрезки, по которым плоскость сечения пересекает грани пирамиды, и линии заливки окрашены в красный цвет. Цвет заливки отрезков выбран в меню окна **Контур фигуры**, а цвет заливки сечения – в меню окна **Заливка фигуры**.

Изображение комбинаций геометрических тел. Рассмотрим, как, используя готовые изображения многогранников и круглых тел, строить изображения комбинаций геометрических тел. Выполним построение чертежа к следующей известной задаче:

Точка O лежит на отрезке, соединяющем вершину треугольной пирамиды объема V с центроидом основания. Найдите объем общей части данной пирамиды и пирамиды, симметричной ей относительно точки O, если точка O делит указанный отрезок в отношении: а) $1:1$, б) $3:1$, в) $2:1$.

При центральной симметрии пространства сохраняются расстояния и всякая плоскость, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей плоскость. Следовательно, во всех трех случаях образом данной пирамиды будет равная ей пирамида, грани которой параллельны граням данной. Поэтому чертеж к задаче можно выполнить следующим образом.

1. Копируем готовое изображение треугольной пирамиды, на котором вершина пирамиды соединена отрезком с центроидом ее основания, вставляем это изображение в поле будущего чертежа (рис. 145, шаг 1).

2. Строим вторую копию пирамиды и выполняем ее отражение сначала относительно горизонтальной, а затем относительно вертикальной оси. Соответствующим образом меняем тип видимых и невидимых ребер (шаг 2).

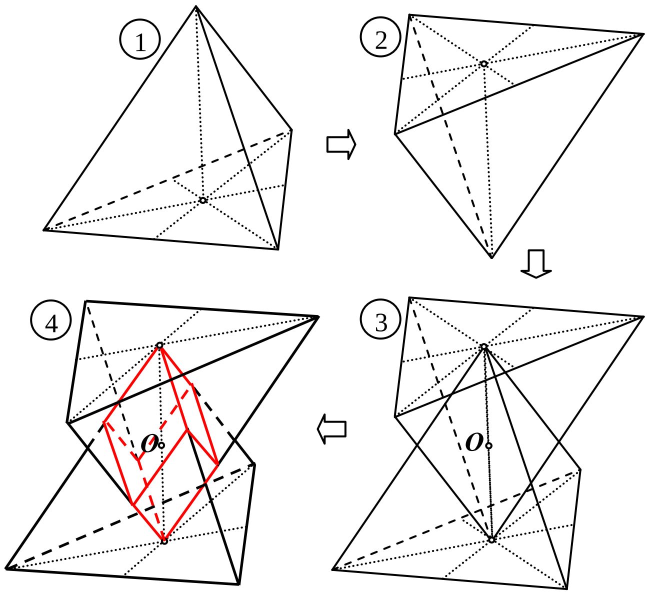


Рис. 145

3. Параллельно переносим вторую пирамиду так, чтобы она была симметрична первой относительно середины отрезка, соединяющего вершину пирамиды с центроидом ее основания (точка O делит отрезок в отношении $1:1$) (шаг 3).

4. Строим изображение общей части пирамид. Теперь, как и при выполнении изображений от руки, потребуется хорошо развитое пространственное мышление. В данном случае важно «увидеть», что общей частью пирамид является параллелепипед, а его вершины, не лежащие в основаниях пирамид, являются точками пересечения боковых ребер одной пирамиды с апофемами соответствующих граней другой (шаг 4).

Нетрудно заметить, что у построенного параллелепипеда только два ребра будут видимыми. Если все его остальные ребра изобразить невидимыми, то такое изображение существенно потеряет в наглядности. Поэтому изображение параллелепипеда выполнено так, как будь-то пирамиды являются прозрачными. Кроме того, для большей наглядности ребра параллелепипеда окрашены другим цветом.

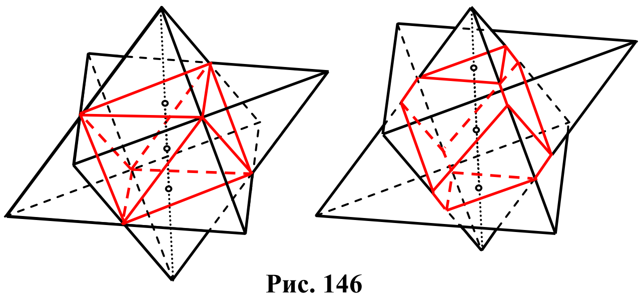


Рис. 146

Чтобы выполнить построение чертежей в двух других случаях, сначала необходимо заданным образом разделить отрезок, соединяющий высоту пирамиды с центроидом ее основания, и после этого соответствующим образом скорректировать построения на шаге 3. Общая часть пирамид в этих случаях изображена на рисунке 146.

В качестве второго примера рассмотрим построение изображения сферы, вписанной в конус.

Выполнение этого изображения начнем с построения сферы и параллели, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Так как высота конуса не задана, параллель можно выбрать произвольно.

1. Копируем эллипс в соответствующем разделе библиотеки и вставляем его в поле будущего чертежа (рис. 147, шаг 1).

2. Выделяем построенный эллипс и щелкаем по нему ПКМ. В открывшемся диалоговом окне выбираем строку **Формат автофигуры** и открываем ее ЛКМ. В новом диалоговом окне выбираем команду **Размер**, которая позволяет определить длину осей эллипса. Диаметр очерковой окружности сферы должен быть равен большой оси эллипса (ширина абсолютная). Строим соответствующую окружность. Сразу выбираем ее толщину и убираем заливку. Параллельно переносим эллипс так, чтобы он служил изображением экватора сферы (шаг 2).

3. Строим изображения полюсов, соответствующих этому экватору. Для этого проводим отрезок KL касательной к эллипсу, параллельный его большой оси (на рисунке выделен красным цветом). Его длина, как было показано, определяет расстояние от точки O, изображающей центр сферы, до точек, которые служат изображениями ее полюсов. Чтобы построить изображения полюсов, копируем отрезок KL и поворачиваем копию на $90°$ (второй красный отрезок). Второй отрезок откладываем от точки O на вертикальной оси очерковой окружности сферы. На рисунке буквой S обозначена только точка, являющаяся изображением южного полюса (шаг 3).

4. Пропорционально уменьшая размеры эллипса, изображающего экватор, выполняем построение эллипса, который примем за изображение параллели, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Убираем красные вспомогательные отрезки. Перемещаем построенный эллипс так, чтобы он касался очерковой окружности, а его центр находился на ее вертикальном диаметре (шаг 4).

5. Удаляем все линии, которые не потребуются для дальнейших построений. На чертеже должны остаться изображения: очерковой окружности сферы, ее центра и полюсов; отрезка, соединяющего полюсы; параллели и ее горизонтального диаметра (шаг 5).

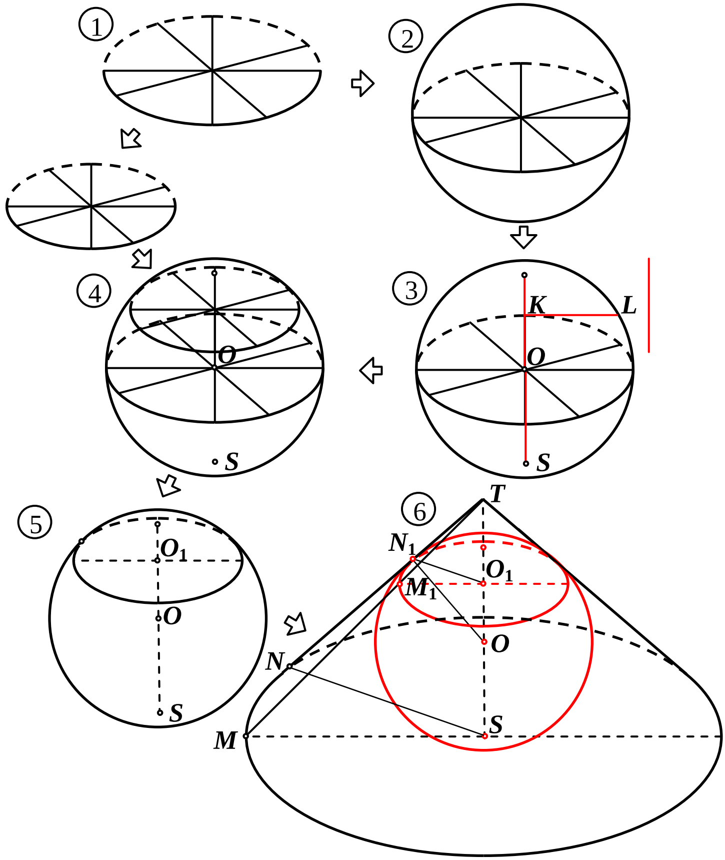


Рис. 147

6. Строим изображение конуса. При построении очерковой образующей конуса пользуемся тем, что она проходит через точку N_1 касания очерковой окружности сферы и эллипса, изображающего параллель. Следовательно, чтобы определить направление этой образующей достаточно построить радиус ON_1 очерковой окружности, а затем повернуть его на $90°$. Точка пересечения очерковой образующей с продолжением отрезка, соединяющего изображения полюсов, обозначена на чертеже буквой T. Эта точка является изображением вершины конуса.

Основание конуса изображается эллипсом, гомотетичным эллипсу, изображающему параллель, в гомотетии с центром T, которая переводит центр O_1 эллипса параллели в точку S, являющуюся изображением южного полюса сферы. В этой гомотетии большая полуось O_1M_1 эллипса параллели переходит в большую полуось OM эллипса, изображающего основание конуса. Таким образом, точка M является точкой пересечения прямой TM_1 и горизонтальной прямой, проходящей через точку S. Построив отрезок OM и обратившись затем к строке **Формат автофигуры**, можно установить параметры эллипса, изображающего основание конуса (шаг 6).

§ 9. Групповой проект

Практика показывает, что умения и навыки работы с графическим редактором пакета MS Office формируются достаточно быстро. Компьютер открывает уникальную возможность хранить однажды созданные чертежи и многократно использовать их в дальнейшем. В подавляющем большинстве случаев при выполнении чертежа к решаемой задаче удается найти и нужным образом скорректировать уже имеющийся чертеж к какой-либо аналогичной задаче. Можно также создать собственную библиотеку чертежей геометрических фигур и их комбинаций. После этого время, которое затрачивается на построение многих геометрических чертежей с помощью редактора, будет сравнимо со временем, затрачиваемым на их выполнение от руки.

Вместе с тем, как показывают последние примеры предыдущего параграфа, процесс построения изображения комбинации геометрических тел может оказаться весьма длительным и трудоемким. Задачи же на комбинации тел в курсе стереометрии встречаются достаточно часто, поэтому вряд ли кто-то из вас откажется иметь в своей библиотеке чертежей геометрических фигур раздел, содержащий изображения основных комбинаций двух геометрических тел. Создание этого раздела может стать темой группового проекта, завершающего данный элективный курс.

Вряд ли стоит включать в раздел изображения комбинаций двух многогранников. Во-первых, весьма широк сам выбор многогранников. Во-вторых, можно указать огромное число геометрически интересных способов расположения многогранников относительно друг друга. Впрочем, некоторые комбинации многогранников (например, куба, указанным образом вписанного в правильную четырехугольную пирамиду) встречаются чаще остальных. Если вы все же выразите желание выполнить изображения некоторых комбинаций двух многогранников, то предпочтение следует отдать именно таким комбинациям.

Гораздо полезней построить изображения многогранников, вписанных в круглые тела и описанных около них. Почти во всех школьных учебниках и задачниках содержатся задачи на комбинации: цилиндра и правильных призм, конуса и правильных пирамид, сферы и правильных призм и пирамид. Поэтому для $n = 3, 4, 5, 6$ рекомендуется выполнить изображения:

– правильной n-угольной призмы, вписанной в цилиндр;

– правильной n-угольной призмы, описанной около цилиндра;

– правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус;

– правильной n-угольной пирамиды, описанной около конуса;

– правильной n-угольной призмы, вписанной в шар;

– правильной n-угольной призмы, описанной около шара.

К этим 24 чертежам следует добавить еще 5 изображений комбинаций двух круглых тел:

– цилиндра, вписанного в конус;

– цилиндра, вписанного в шар;

– конуса, вписанного в шар (можно рассмотреть различные случаи расположения центра шара относительно основания конуса);

– шара, вписанного в цилиндр;

– шара, вписанного в конус.

В качестве более трудных заданий можно рекомендовать изображение: октаэдра (додекаэдра, икосаэдра), вписанного в шар, или описанного около шара; сферы, которая касается ребер данного правильного многогранника или делит их в заданном отношении (например, на три равные части). Хорошим средством развития пространственного мышления является также выполнение чертежей к задачам, в которых рассматриваются различные комбинации нескольких круглых тел.

Порядок организации выполнения проекта определяется учителем. Он может дать индивидуальные задания каждому слушателю элективного курса, может разбить слушателей на малые группы и дать задания группам и т. п. К заключительному занятию слушатель (группа) готовит презентацию, содержащую выполненные изображения и их обоснование. Заключительное занятие проводится в классе, оборудованном проектором или интерактивной доской.

Ответы и указания

§ 1

3. Пусть $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda_1\overrightarrow{C_1B_1}$, $\lambda \neq -1$, $\lambda_1 \neq -1$. Из условия задачи $\overrightarrow{BB_1} = \beta\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1} = \gamma\overrightarrow{AA_1}$. Если точки A и A_1 не совпадают, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не коллинеарны. Разложите по ним векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$; воспользуйтесь теоремой о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. Если точки A и A_1 совпадают, то треугольники ACC_1 и ABB_1 подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}$. **9.** Рассмотрите гомотетию с центром в точке S пересечения секущих прямых, которая переводит точку A в точку A_1.

§ 3

8. Пусть $SABCD$ – данная пирамида. Сечение должно быть параллельно плоскости SPQ, где S – вершина пирамиды, SP и SQ – линии пересечения плоскостей противоположных боковых граней. **9.** Пусть $SABC$ – данная пирамида, а $MNKL$ – ромб-сечение со стороной m, где $M \in AS$, $N \in CS$, $K \in BC$ и $L \in AB$. Обозначим $AC = a$, $SB = b$, $SM = x$. Тогда $\frac{x}{AS} = \frac{m}{a} = \frac{AS-AM}{AS} = 1 - \frac{AM}{AS} = 1 - \frac{m}{b}$. Из этих равенств имеем: $\frac{m}{a} + \frac{m}{b} = 1$, $m = \frac{ab}{a+b}$ и $\frac{x}{AS} = \frac{b}{a+b}$. Найденная пропорция позволяет построить точку M. Искомое сечение проходит через эту точку M параллельно прямым AC и SB.

§ 4

7. Пусть AB, CD – оси эллипса. Постройте на оси AB как на диаметре окружность ω. Сопряженные диаметры эллипса будут образами взаимно перпендикулярных диаметров окружности ω при ее сжатии к прямой AB в направлении прямой CD, при котором точка C_0 переходит в точку C (C_0 – точка пересечения прямой CD и окружности ω). **12.** Пусть параллелограмм $ABCD$ – изображение квадрата $A_0B_0C_0D_0$, тогда его диагонали являются сопряженными диаметрами эллипса, который служит изображением окружности, описанной около квадрата $A_0B_0C_0D_0$. **13.** См. указание к предыдущей задаче. **14.** Выберете прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы точки F_1 и F_2 лежали на оси

Ox, а середина отрезка F_1F_2 совпадала с точкой O. Пусть в этой системе координат $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ и $M(x, y)$ – произвольная точка искомого множества, тогда $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Если положить $PQ = 2a$, то $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Обозначив $b^2 = a^2 - c^2$, приведите уравнение к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

§ 6

3. См. рис. 148. **4.** См. рис. 149.

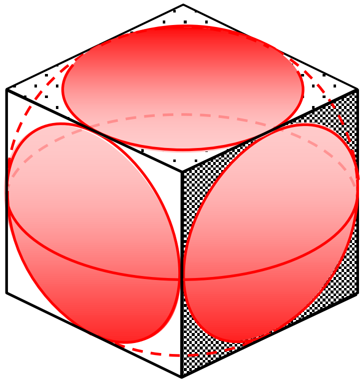


Рис. 148

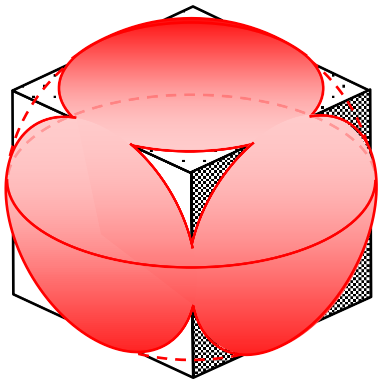


Рис. 149

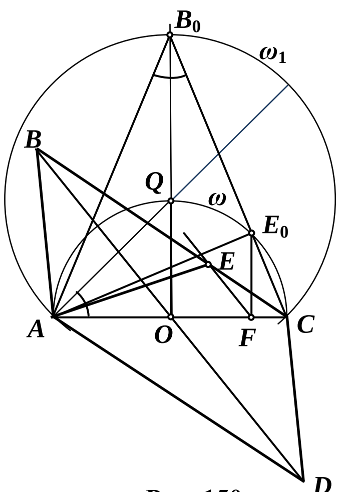


Рис. 150

§ 7

1. Изображение центра описанной окружности определяет изображения перпендикуляров к сторонам треугольника в их серединах. Для построения треугольника, подобного оригиналу, используйте задачу 7.1 и то, что центр окружности, описанной около данного треугольника, является ортоцентром треугольника с вершинами в серединах сторон данного. **2.** Пусть O – центр эллипса γ, являющегося изображением окружности, A, B – точки пересечения лучей, параллельных сторонам данного угла, с эллипсом γ. Тогда треугольник AOB служит изображением равнобедренного треугольника. **3.** Искомым изображением служит любой отрезок данной прямой, равный диаметру данного эллипса, параллельного этой прямой. **4.** Пусть параллелограмм $ABCD$ является изображением ромба с острым углом 45° (рис. 150). На меньшей диагонали AC как на основании строим равнобедренный треугольник AB_0C с углом 45° при вершине B_0. (Вершина B_0 является точкой пересечения перпендикуляра к отрезку AC в его середине O и дуги ω_1 окружности, из которой отрезок AC виден под углом 45°.) Опускаем перпендикуляр AE_0 на сторону B_0C треугольника AB_0C. Через точку E_0 проводим прямую E_0F ($F \in AC$), параллельную B_0O, а через точку F – прямую FE ($E \in BC$), параллельную BD. Тогда $\frac{B_0E_0}{E_0C} = \frac{OF}{FC} = \frac{BE}{EC}$; AE – искомое изображение высоты ромба. **5.** Через центр O эллипса γ, являющегося изображением окружности, проведите лучи OA, OB, параллельные сторонам данного угла (A, B – точки пересечения лучей с эллипсом γ). На одной из осей эллипса как на диаметре постройте окружность и рассмотрите сжатие плоскости к прямой, содержащей эту ось, при котором эллипс переходит в окружность. Найдите образ угла AOB, в этом сжатии. **8.** Найдите истинную форму треугольника AA_1C_1. Для этого на изображении ребра AA_1 постройте треугольник AA_1C_0, где $AC_0 = AA_1\sqrt{2}$, $A_1C_0 = AA_1\sqrt{3}$. **9.** Пусть $SABCD$ – заданное изображение пирамиды, E, F – изображения середин ребер AD, BC соответственно. Учитывая, что высота пирамиды равна стороне основания, постройте равнобедренный треугольник EFS_0 – оригинал треугольника EFS и

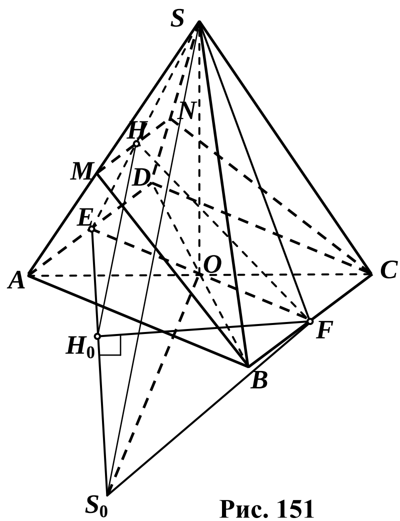


Рис. 151

его высоту FH_0 (рис. 151). **10.** Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – заданное изображение призмы. Постройте прямоугольник $CC_1D_{10}D_0$, являющийся оригиналом сечения CC_1D_1D призмы, где D – середина ребра AB (рис. 152). **15.** Пусть E – точка пересечения секущей плоскости с ребром SC. Приняв отрезок AC за оригинал

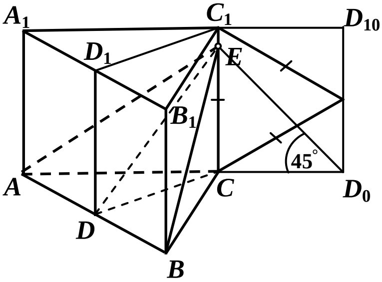


Рис. 152

диагонали основания, найдите оригинал бокового ребра пирамиды (рис. 153). На этом рисунке S_0C – оригинал бокового ребра, D_0C – оригинал стороны основания пирамиды.

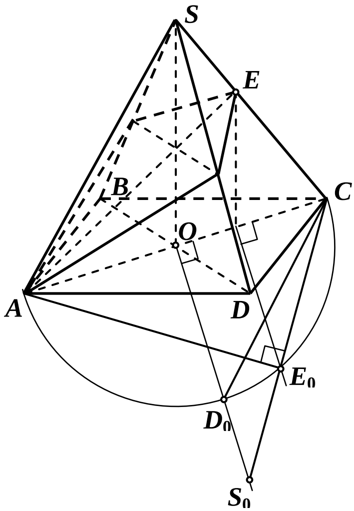


Рис. 153

Литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.

2. Бескин Н. М. Изображение пространственных фигур. – М.: Наука, 1971. – 80 с. – (Серия: «Популярные лекции по математике»).

3. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений: книга для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 127 с.

4. Понарин Я. П. Изображение фигур в параллельных проекциях. – Киров: Изд-во ВГПУ, 1999. – 118 с.

5. Смирнова И. М. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10–11-й классы: учебное пособие для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2007. – 64 с.

6. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. – М.: Учпедгиз, 1952. – 128 с.

Приложение для учителя

Возможны различные варианты использования предлагаемого учебного пособия для постановки элективного курса «Изображение геометрических фигур в параллельной проекции». В приложении приводится почасовое планирование такого курса для учащихся 11-го класса в объеме 17 часов.

При планировании предполагается, что учитель при систематизации необходимого учебного материала, приведенного в учебниках геометрии, и изложении нового теоретического материала будет опираться на готовые чертежи, используя для этого проектор или интерактивную доску. Для этого все чертежи, предназначенные для изложения теоретического материала, даны в электронном приложении. Их можно также применять на уроках геометрии при изучении соответствующих разделов курса.

Практическая работа учащихся по изучению возможностей встроенного графического редактора пакета MS Office для построения изображений геометрических фигур проводится в стационарном или мобильном компьютерном классе.

Курс завершается защитой группового проекта «Изображения комбинаций многогранников и круглых тел», на которой отдельные учащиеся или малые группы представляют отчеты о выполнении своей части проекта.

№ п/п	**Наименование изучаемых тем**	**Форма занятий**	**Кол-во часов**
1.	Графические изображения. Виды изображений. Требования к изображениям. Параллельное проектирование и его свойства	Лекция-презентация с элементами обобщающего повторения	1 час
2.	Изображение треугольника и тетраэдра. Изображение произвольных и правильных многоугольников. Изображение многогранников (призма, пирамида, усеченная пирамида)	Лекция-беседа с применением готовых чертежей. Практическая работа учащихся с карандашом и чертежными инструментами	2 часа

3.	Изображение сечений многогранников. Изображение линий пересечения двух многогранников	Практическая работа учащихся с карандашом и чертежными инструментами	2 часа
4.	Сжатие плоскости к прямой. Эллипс и его свойства. Изображение окружности. Изображение вписанных и описанных многоугольников	Лекция-беседа с применением готовых чертежей. Практическая работа учащихся с карандашом и чертежными инструментами	2 часа
5.	Изображение цилиндра, конуса и их сечений плоскостью	Лекция-беседа с применением готовых чертежей. Практическая работа учащихся с карандашом и чертежными инструментами	1 час
6.	Изображение шара и его сечений плоскостью. Примеры построения изображений комбинаций двух круглых тел, многогранников и круглых тел	Лекция-беседа с применением готовых чертежей. Практическая работа учащихся с карандашом и чертежными инструментами	2 часа
7.	Встроенный графический редактор пакета MS Office. Технология построения изображений геометрических тел и их комбинаций средствами этого редактора	Практическая работа на компьютере	5 часов
Защита проекта			2 часа

Учебное издание

Клековкин Геннадий Анатольевич

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Учебное пособие
для учащихся 10–11-х классов

Компьютерная верстка *Г. А. Клековкин*
Корректура *Н. В. Мыльникова*
Обложка ООО «Современный стандарт»

Самарский филиал ГАОУ ВО города Москвы
«Московский городской педагогический университет»,
443041, г. Самара, ул. Братьев Коростелевых, 76.

Подписано в печать 23.03.16. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$. Бумага офисная.
Гарнитура Times New Roman. Печать оперативная. Усл. печ. л. 8,25.
Тираж 100 экз. Заказ 3003.
Отпечатано в типографии ООО «Современный стандарт»,
443080, г. Самара, ул. Санфировой, 95, 1 эт., позиция 22.