Департамент образования и науки города Москвы
Государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования города Москвы
«Московский городской педагогический университет»
Самарский филиал

Е. А. Богданова,
С. Н. Богданов, П. С. Богданов

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Учебно-методическое пособие
для студентов*

Самара
2021

УДК 517
ББК 22.161
Б73

*Печатается по решению Ученого совета
СФ ГАОУ ВО МГПУ*

Рецензенты:
Г. Н. Горелов, к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королёва;
Е. Л. Макарова, к. п. н., доцент кафедры информатики, прикладной математики и методики их преподавания Самарского государственного социально-педагогического университета

Богданова Е. А. и др.
Б73 Основные методы интегрирования функций одной переменной: учебно-методическое пособие для студентов / Е. А. Богданова, С. Н. Богданов, П. С. Богданов. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2021. – 78 с.

ISBN 978-5-6045663-1-2

Пособие предназначено для студентов университетов, изучающих математический анализ либо его отдельные разделы в курсе высшей математики. Содержит основные теоретические сведения по теме «Неопределенный интеграл», примеры решения задач, индивидуальные задания. В пособии также представлена разработка практических занятий по данной теме.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-6045663-1-2

Содержание

§ 1. Неопределённый интеграл и его свойства

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $y=f(x)$ на числовом промежутке I, если в любой точке $x\in I$ функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную, равную $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$. Учитывая, что $F'(x)=\frac{dF}{dx}$, иначе можно сказать так: $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке I, если $\forall x\in I$

$$dF(x)=f(x)dx. \tag{1}$$

Например: 1) Если $f(x)=x^2$, то $F(x)=\frac{x^3}{3}$ на $I=R$, так как $F'(x)=x^2 \quad \forall x\in R$.

2) Если $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, то $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ на $I=(-1;1)$, так как $F'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x\in(-1;1)$.

Любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.

Задача отыскания первообразной решается для данной функции неоднозначно. Например, для функции $f(x)=x^2$ первообразными будут функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+2$, $\frac{x^3}{3}+\sqrt{2}$ и т. д.

Теорема: Если функция $F(x)$ является первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то всякая другая первообразная функция $f(x)$ может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C – постоянная.

Доказательство: Пусть $\Phi(x)$ первообразная функции $f(x)$, отличная от $F(x)$. Тогда $F'(x)=\Phi'(x)=f(x)$. Но если две функции имеют равные производные, то разность этих функций постоянна, т. е. $\Phi(x)-F(x)=C$, где $C-const$, следовательно, $\Phi(x)=F(x)+C$.

Определение. Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$. Иначе можно сказать, что неопределённый интеграл функции $f(x)$ – это совокупность всех первообразных этой функции.

Неопределённый интеграл обозначается $\int f(x)dx$. По определению: $\int f(x)dx=F(x)+C$. При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а символ $\int$ – знаком неопределённого интеграла.

Например, $\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+C$, $\int \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}+C$.

Процесс нахождение неопределённого интеграла некоторой функции называется *интегрированием этой функции.*

Так как $dF(x)=f(x)dx$ и $dC=0$, то

$$d\left[\int f(x)dx\right]=d\left(F(x)+C\right)=f(x)dx, \tag{2}$$

то есть дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

Кроме того, так как $dF(x)=f(x)dx$, то

$$\int dF(x)=F(x)+C. \tag{3}$$

Например, $\int dx=x+C$; $\int d(\cos x)=\cos x+C$.

Формулы (2) и (3) означают, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными действиями.

График функции $y=F(x)+C$ при каждом конкретном значении C называется *интегральной кривой*. Поэтому геометрически неопределённый интеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$ представляет собой

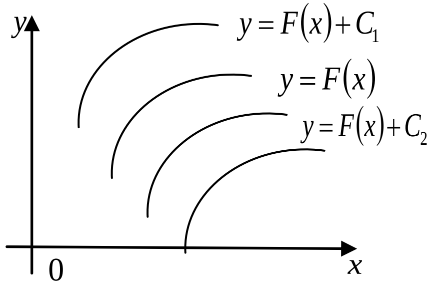

*Рис.*1

семейство всех интегральных кривых (рис. 1). В этом состоит *геометрический смысл неопределённого интеграла.*

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определённую кривую, удовлетворяющую условию задачи, нужно задать дополнительное условие, например, потребовать, чтобы кривая проходила через данную точку $(x_0; y_0)$. Тогда C находится из условия $y_0 = F(x_0) + C$, следовательно, $C = y_0 - F(x_0)$.

Пример. Через точку $M(1,2)$ провести кривую, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке с абсциссой x равен x^2.

Решение. Так как $y' = x^2$, то множество функций $y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ задает семейство кубических парабол. Для нахождения C подставим координаты точки M в уравнение $y = \frac{x^3}{3} + C$: $2 = \frac{1}{3} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{5}{3}$. Таким образом, уравнение искомой кривой: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$.

Для интегрирования обычно используется таблица интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	12. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C =$ $= -\arccos\frac{x}{a} + C, \ (a \neq 0)$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = = \ln\left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C,\ a \neq 0$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$	15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,\ (a \neq 0)$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$	16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\| \frac{x+a}{x-a} \right\| + C = = -\frac{1}{2a}\ln\left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$	17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right\| + C = = \ln\left\| \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg}x \right\| + C$
7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C$	18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\| + C = = \ln\left\| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg}x \right\| + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	19. $\int \operatorname{sh}x dx = \operatorname{ch}x + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	20. $\int \operatorname{ch}x dx = \operatorname{sh}x + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}x + C$
11. $\int \operatorname{tg}x dx = -\ln\left\| \cos x \right\| + C$	22. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}x + C$

Вывод этих формул сводится к проверке того, что дифференциал правой части равен подынтегральному выражению в левой части.

Докажем, например, справедливость формулы 2.

Подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ определена и непрерывна для всех x, кроме $x = 0$.

Если $x > 0$, то $|x| = x \Rightarrow \ln|x| = \ln x$. Тогда $d\ln|x| = d\ln x = \frac{dx}{x} \Rightarrow$ для $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln|x| + C$.

Если $x < 0$, то $|x| = -x \Rightarrow \ln|x| = \ln(-x)$. Тогда $d\ln|x| = d\ln(-x) = \frac{(-1)dx}{-x} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$ для $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln|x| + C$.

Справедливость формулы 2 доказана.

Свойства неопределённого интеграла:

1. Неопределённый интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределённых интегралов от каждого слагаемого в отдельности, то есть $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

2. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределённого интеграла, то есть $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где $k = const$.

Доказательство свойства 2.

Дифференцируя левую часть доказываемого равенства, получаем: $d\left(\int k \cdot f(x)dx\right) = kf(x)dx$.

Дифференцируя правую часть доказываемого равенства, имеем: $d\left[k\int f(x)dx\right] = kd\left[\int f(x)dx\right] = kf(x)dx$, следовательно, свойство 2 выполняется.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$, где k и b – некоторые действительные числа, причем $k \neq 0$.

Используя отмеченные свойства и таблицу интегралов, можно вычислять простейшие неопределенные интегралы.

Пример. Найти $\int \left(x^3 + 3\sin x - 8\right)dx$.

Решение. $\int \left(x^3 + 3\sin x - 8\right)dx = \int x^3 dx + 3\int \sin x dx - 8\int dx =$

$$= \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 8x + C.$$

Практическое занятие 1. Непосредственное интегрирование (интегрирование с использованием табличных интегралов и свойств неопределенного интеграла).

Примеры вычисления неопределенных интегралов.

Используя свойства неопределённых интегралов и таблицу интегралов, вычислить интегралы.

1. $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$.

2. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$.

3. $\int \sqrt[5]{x^7} dx = \int x^{\frac{7}{5}} dx = \dfrac{x^{\frac{7}{5}+1}}{\frac{7}{5}+1} + C = \dfrac{5x^{\frac{12}{5}}}{12} + C$.

Интегралы в примерах 1–3 вычислены с помощью первого табличного интеграла.

4. $\int \dfrac{6}{x^{10}} dx = 6 \cdot \int x^{-10} dx = 6 \cdot \dfrac{x^{-10+1}}{-10+1} + C = -\dfrac{6}{9x^9} + C = -\dfrac{2}{3x^9} + C$

5. $\int 5\sqrt[8]{x^5} dx = 5 \cdot \int x^{\frac{5}{8}} dx = 5 \cdot \dfrac{x^{\frac{5}{8}+1}}{\frac{5}{8}+1} + C = \dfrac{40x^{\frac{13}{8}}}{13} + C$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{7}dx = \frac{1}{7}\cdot\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{28} + C$

При вычислении интегралов в примерах 4–6 применено второе свойство неопределенного интеграла.

7. $\int\left(4\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^5} + 2x^3 + 1\right)dx = 4\int x^{\frac{2}{3}}dx - \int x^{-5}dx + 2\int x^3dx + \int dx =$

$= 4\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + x + C = \frac{12\cdot x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{1}{4x^4} + \frac{x^4}{2} + x + C$

При вычислении интеграла в примере 7 применены первое и второе свойства неопределенного интеграла.

8. $\int\frac{dx}{e^x} = \int e^{-x}dx = \frac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C$

9. $\int\sin(5x-2)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x-2) + C$, так как $\int\sin x dx = -\cos x + C$

При вычислении интегралов в примерах 8–9 использовано третье свойство неопределенного интеграла.

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int(2\sin x - 3\sqrt{x^5} + \frac{6}{x^2+9})dx$
2. $\int(3\mathrm{tg}x - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2-16})dx$
3. $\int(-5\mathrm{ch}x - 4\cdot 2^x + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}})dx$
4. $\int(\frac{1}{\sin^2 x} - 10\sqrt[3]{x^7} + \frac{7}{\sqrt{x^2+9}})dx$
5. $\int(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} - 2\cos(4x-5) + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$
6. $\int(\frac{3}{\sin x} - e^{2x-1} + \frac{7}{\sqrt{x^2-1}})dx$

7. $\int \left(\frac{1}{3x+2} - 5\sqrt[4]{x^5} + \frac{7}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$

8. $\int \left(\frac{1}{\cos^2(4x+5)} - 5 + \frac{1}{9-x^2}\right)dx$

9. $\int \left(\mathrm{ctg}(-2x+3) - \frac{9}{x} + \frac{7}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$

10. $\int \left(\frac{1}{4-3x} - 3^{3x+2} - \frac{9}{x^2-1}\right)dx$

§ 2. Основные методы интегрирования

1. *Интегрирование методом разложения.*

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму функций, для каждой из которых первообразную можно найти с помощью других методов.

Пример. Разложение подынтегральной функции на сумму функций может быть осуществлено путем раскрытия скобок при умножении некоторых выражений:

$$\int (3x-8)\left(\sqrt{x} - x + 2\right)dx = \int \left(3x^{\frac{3}{2}} - 3x^2 + 6x - 8x^{\frac{1}{2}} + 8x - 16\right)dx =$$

$$= \frac{3 \cdot x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{3 \cdot x^{2+1}}{2+1} + \frac{14 \cdot x^2}{2} - \frac{8x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 16x + C =$$

$$= \frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5} - x^3 + 7x^2 - \frac{16x^{\frac{3}{2}}}{3} - 16x + C.$$

Пример. Разложение подынтегральной функции на сумму функций может быть осуществлено путем почленного деления числителя на знаменатель: $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C.$$

Практическое занятие № 2. Интегрирование методом разложения.

Примеры вычисления неопределенных интегралов методом разложения:

1. $\int \frac{\sin x + e^x}{\sin x \cdot e^x} dx = \int \frac{dx}{e^x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -e^{-x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C$

3. $\int \frac{3x - \sqrt[4]{x^7}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{4}} \right) dx =$

$= \frac{3 \cdot x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C == 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{4 \cdot x^{\frac{9}{4}}}{9} + C$

4.

$\int \left(\sin x + \frac{\sqrt[5]{x^3} + 4}{x} + \frac{1}{4 + x^2} \right) dx = \int \sin x dx + \int \left(\frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} + \frac{4}{x} \right) dx + \int \frac{dx}{2^2 + x^2} =$

$= -\cos x + \int x^{-\frac{2}{5}} dx + 4\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$

$= -\cos x + \frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} + 4\ln|x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$

$= -\cos x + \frac{5x^{\frac{3}{5}}}{3} + 4\ln|x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int\left(\frac{\sqrt[7]{x^4}+x^4}{x^5}+8^x\right)dx$

2. $\int\frac{\sin^2 x-8x^{10}}{x^{10}\sin^2 x}dx$

3. $\int\frac{5^x+5\sqrt{4-x^2}}{5^x\sqrt{4-x^2}}dx$

4. $\int\frac{\cos x+9+x^2}{\cos x\cdot\left(9+x^2\right)}dx$

5. $\int\frac{\cos^2 x+x^2-16}{\left(x^2-16\right)\cdot\cos^2 x}dx$

6. $\int\frac{\sqrt[3]{x^8}+3x\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^{11}}}dx$

7. $\int\left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{\cos x\cdot\sin x+1}{\sin^2 x}\right)dx$

8. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{4^x\cdot\cos x+\sin x}{\cos x}\right)dx$

9. $\int\left(\sqrt[3]{x}+8x^2\right)\cdot\left(x^3-4x+5\right)dx$

10. $\int\frac{\sin 2x+\sqrt[5]{x^7}\sin x}{\sin x}dx$

Индивидуальное задание № 1. Найдите интегралы, используя разложение подынтегрального выражения на сумму нескольких выражений.

1. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-x\right)\left(\sqrt[3]{x}+2x^2\right)}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int\frac{5x-\cos^2 x}{x\cdot\cos^2 x}dx$

3. $\int\frac{5\sin^2 x-4\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

4. $\int\frac{7\cdot\sqrt[3]{x}+3^x}{\sqrt[3]{x}\cdot 3^x}dx$

5. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

6. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}-5\cdot 2^x}{2^x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$

16. $\int\frac{7\cos^2 x-1-x^2}{\left(x^2+1\right)\cos^2 x}dx$

17. $\int\frac{\sqrt{x}\sin x-\cos^2 x+1}{\sin x}dx$

18. $\int\frac{4\cdot 20^x-3\cdot 50^x+1}{10^x}dx$

19. $\int\frac{6\cdot\sqrt[4]{x}+7^x}{\sqrt[4]{x}\cdot 7^x}dx$

20. $\int\frac{7\cdot 4^x\cos x-\sin^2 x+1}{\cos x}dx$

21. $\int\frac{2\cdot 18^x+3\cdot 12^x+1}{6^x}dx$

7. $\int \frac{3\sin^2 x - x}{x\sin^2 x}dx$

8. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2x\right)\left(\sqrt[3]{x}-3x^2\right)}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}dx$

9. $\int \frac{3\cdot 2^x + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot 2^x}dx$

10. $\int \frac{3\cos^2 x + 7\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

11. $\int \frac{x^2+1-3\sin^2 x}{\left(1+x^2\right)\sin^2 x}dx$

12. $\int \frac{e^x - 5\cos^2 x}{e^x\cos^2 x}dx$

13. $\int \frac{2\cdot 3^x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot 3^x}dx$

14. $\int \frac{3\sin^2 x - 2\cos^2 x}{\sin^2 2x}dx$

15. $\int \frac{e^x + 2\sin^2 x}{e^x\sin^2 x}dx$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\cos x - \sin^2 x + 1}{\cos x}dx$

23. $\int \frac{2\cdot 6^x - 7\cdot 15^x + 1}{3^x}dx$

24. $\int \frac{2\cdot 3^x\sin x - \sin 2x}{\sin x}dx$

25. $\int \frac{\sqrt[5]{x}\cos x + 2\sin 2x}{\cos x}dx$

26. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+4x^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+2x^2\right)}{x^3\cdot\sqrt[3]{x}}dx$

27. $\int \frac{8\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 2x}dx$

28. $\int \frac{7\cdot 5^x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot 5^x}dx$

29. $\int \frac{1+x^2-\cos^2 x}{\left(x^2+1\right)\cos^2 x}dx$

30. $\int \frac{3\cdot 5^x\sin x - \cos^2 x + 1}{\sin x}dx$

2. Интегрирование методом замены переменной.

При нахождении интеграла этим методом после введения новой переменной интеграл сводится к табличному или легко вычисляется другим способом. Этот метод иначе называют *методом интегрирования подстановкой.*

Пусть $x=\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$. Докажем, что имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz\,. \qquad (4)$$

Это равенство называют *формулой замены переменной.*

Доказательство:

$d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$d\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz = f(x)dx$, поскольку $x=\varphi(z)$, а $dx=\varphi'(z)dz$.

Так как дифференциалы от правой и левой части равенства (4) равны, то это равенство верно.

Допустим, что интеграл, стоящий в правой части соотношения (4), найден, то есть

$$\int f(\phi(z))\phi'(z)dz = \Phi(z)+C.$$

Отсюда легко найти искомый интеграл в виде функции от x. Для этого решают уравнение $x=\varphi(z)$ относительно z, то есть находят обратную функцию $z=\varphi^{-1}(x)$ и подставляют её в $\Phi(z)$:

$$\int f(x)dx = \Phi(z)+C = \Phi(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. $x=a\cdot z \Rightarrow dx=a\cdot dz$ Тогда по формуле (4) получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C = \arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Применяя ту же замену переменной $x=a\cdot z$, легко получим формулу:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Пример. Найти $\int \sin ax dx$.

Решение. Полагаем $ax=z$, то есть $x=\frac{z}{a} \Rightarrow dx=\frac{dz}{a} \Rightarrow$

$\int \sin ax dx = \int \sin z\frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int \sin z dz = -\frac{1}{a}\cos ax + C$. Этот интеграл можно также легко вычислить, используя третье свойство неопределенных интегралов.

Рассмотрим ещё один способ применения формулы замены переменной. Если под интегралом стоит сложная функция, умноженная на производную от внутренней функции, то есть $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то этот интеграл можно упростить, если заменить внутреннюю функцию новой переменной $z=\varphi(x)$. Тогда получим: $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=\int f(\phi(x))d(\phi(x))=\int f(z)dz$. Процесс перехода от интеграла $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ к интегралу $\int f(\phi(x))d(\phi(x))$ называют внесением под знак дифференциала.

Пример. Найти $\int \mathrm{tg}x dx$.

Решение. $\int \mathrm{tg}x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)' dx}{\cos x}=$

$$=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\int \frac{dz}{z}=-\ln|z|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

Аналогично можно найти: $\int \mathrm{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C$.

Пример. Найти $\int \sqrt[3]{1+x^2}\, x dx$.

Решение. Замечая, что $d(1+x^2)=2xdx$, получим

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\, xdx=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1+x^2}\, 2xdx=\frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8}+C.$$

Используя внесение функции под знак дифференциала, можно доказать третье свойство неопределенных интегралов. Пусть $\int f(x)dx=F(x)+C$, тогда $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}\int f(kx+b)kdx=$

$$=\frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b)=[z=kx+b]=\frac{1}{k}\int f(z)dz=\frac{1}{k}F(z)+C=$$

$$=\frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Практическое занятие № 3. Интегрирование внесением функции под знак дифференциала.

Найти дифференциал функции, используя формулу $df(x)=f'(x)dx$.

1. $d(5x)=(5x)'dx=5dx$

2. $d(tgx)=(tgx)'dx=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

3. $d(\log_3 x)=(\log_3 x)'dx=\dfrac{dx}{x\ln 3}$

4. $d(\arcsin x)=(\arcsin x)'dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Вычислить интегралы:

1. $\int(3x-4)d(3x-4)=\dfrac{(3x-4)^2}{2}+C$

2.

$$\int(8x+7)^4 d(8x+7)=[z=8x+7]=\int z^4dz=\frac{z^5}{5}+C=\frac{(8x+7)^5}{5}+C$$

3. $\int\sin^3 x\, d(\sin x)=[z=\sin x]=\int z^3dz=\dfrac{z^4}{4}+C=\dfrac{\sin^4 x}{4}+C$

4. $\int(\arcsin x)^8 d(\arcsin x)=\dfrac{\arcsin^9 x}{9}+C$

Примеры вычисления интегралов методом внесения под знак дифференциала:

1. $\int(5x+2)dx=\dfrac{1}{5}\int(5x+2)d(5x+2)=\left[\text{т.к. } d(5x+2)=5dx\right]=$

$$=\frac{(5x+2)^2}{10}+C$$

2. $\int(8x-1)^3dx=\dfrac{1}{8}\cdot\int(8x-1)^3d(8x-1)=\dfrac{(8x-1)^4}{32}+C$

3. $\int\left(\cos^5 x\cdot\sin x\right)dx=-\int\cos^5 x d\left(\cos x\right)=$

$=\left[т.к.\ d\left(\cos x\right)=-\sin x dx\right]=-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$

4. $\int e^{7x+5}dx=\dfrac{1}{7}\cdot\int e^{7x+5}d\left(7x+5\right)=\dfrac{1}{7}\cdot e^{7x+5}+C$

5. $\int\dfrac{x\cdot dx}{3x^2-4}=\dfrac{1}{6}\int\dfrac{d\left(3x^2-4\right)}{3x^2-4}=\left[т.к.\ d\left(3x^2-4\right)=6xdx\right]=$

$=\dfrac{1}{6}\cdot\ln\left|3x^2-4\right|+C$

6. $\int\dfrac{\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx=\int\mathrm{tg}^4 x d\left(\mathrm{tg}x\right)=\left[т.к.\ d\left(\mathrm{tg}x\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx\right]=\dfrac{\mathrm{tg}^5 x}{5}dx$

7. $\int\dfrac{dx}{9x^2+4}=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{d\left(3x\right)}{\left(3x\right)^2+2^2}=\left[т.к.\ d\left(3x\right)=3dx\right]=\dfrac{1}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{3x}{2}+C$

8. $\int\dfrac{1}{\cos x}dx=\int\dfrac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\dfrac{d\left(\sin x\right)}{1-\sin^2 x}=$

$=[т.к.\ d\left(\sin x\right)=\cos x]=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

9. $\int\dfrac{9+x}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int\dfrac{9}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=$

$=9\int\dfrac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(9-x^2\right)}{\sqrt{9-x^2}}=$

$=9\cdot\arcsin\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{9-x^2}+C=9\arcsin\dfrac{x}{3}-\sqrt{9-x^2}+C$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int\left(8x+7\right)dx$

2. $\int\cos^3 xdx$

7. $\int\dfrac{\sqrt{\mathrm{ctg}5x}}{\sin^2 5x}dx$

8. $\int\dfrac{\cos\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sin x}$

4. $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x - 9\right)}$

5. $\int x\left(3x^2 + 5\right)^{10} dx$

6. $\int \frac{\arcsin 5x}{\sqrt{1 - 25x^2}} dx$

9. $\int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$

10. $\int \frac{x \cdot dx}{4 + x^4}$

11. $\int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x + 3}} dx$

Индивидуальное задание № 2. Найдите интеграл, применяя метод внесение под знак дифференциала.

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$

3. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

4. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

5. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$

6. $\int \cos^5 x dx$

7. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{1 + \cos^2 x}$

8. $\int \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} \cdot dx}{1 + x^2}$

17. $\int \frac{e^x \cdot dx}{1 + e^{2x}}$

18. $\int \frac{e^x \cdot dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

19. $\int \frac{2^x \cdot dx}{1 + 2^x}$

20. $\int x^3 e^{x^4} dx$

21. $\int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 3} dx$

22. $\int \cos x \sqrt[5]{\sin x} dx$

23. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x - \sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$

9. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$

11. $\int \frac{\mathrm{tg} x}{\cos^2 x} dx$

12. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg} x}\cos^2 x}$

14. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg} x}$

15. $\int \frac{\mathrm{arcctg} x \cdot dx}{1+x^2}$

24. $\int \frac{\mathrm{tg} x - \mathrm{ctg} x}{\cos^2 x} dx$

25. $\int e^{\cos x} \sin x dx$

26. $\int \left(x^3-1\right)\cdot \sin\left(x^4-4x+2\right) dx$

27. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$

28. $\int \frac{\sqrt{\ln 7x}}{x} dx$

29. $\int e^{\sin 5x} \cos 5x dx$

30. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$

Практическое занятие № 4. Интегрирование с помощью выделения полного квадрата.

Примеры вычисления интегралов с помощью выделения полного квадрата.

В следующих примерах интегралы приводятся к табличным интегралам путем выделения полного квадрата и введения новой переменной.

1. $\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$

$= \left[z = x-2;\ x = z+2;\ dx = dz\right] = \int \frac{dz}{z^2+1} = \mathrm{arctg} z + C = \mathrm{arctg}(x-2)+C$

2. $\int \frac{dx}{-x^2-5x+5} = \int \frac{dx}{-(x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\frac{25}{4})+\frac{25}{4}+5} = \int \frac{dx}{\frac{45}{4}-(x+\frac{5}{2})^2} =$

$$=\left[z=x+\frac{5}{2};\ x=z-\frac{5}{2};\ dx=dz\right]=\int\frac{dz}{\frac{45}{4}-z^2}=\frac{1}{\sqrt{45}}\ln\left|\frac{z+\frac{\sqrt{45}}{2}}{z-\frac{\sqrt{45}}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{45}}\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2}}{x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{45}}{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{45}}\ln\left|\frac{x+\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}\right|+C$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}}=$$

$$=[z=x-3;\ x=z+3;\ dx=dz]=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-4}}=\ln\left|z+\sqrt{z^2-4}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2-4}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+5}\right|+C$$

4.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7-x^2-9x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2\cdot\frac{9}{2}x+\frac{81}{4})+\frac{81}{4}+7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{4}-(x+\frac{9}{2})^2}}=$$

$$=\left[z=x+\frac{9}{2};\ x=z-\frac{9}{2};\ dx=dz\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{109}{4}-z^2}}=\arcsin\frac{2z}{\sqrt{109}}+C=$$

$$=\arcsin\frac{2(x+\frac{9}{2})}{\sqrt{109}}+C=\arcsin\frac{2x+9}{\sqrt{109}}+C$$

В следующих примерах кроме выделения полного квадрата и введения новой переменной используется разложение подынтегрального выражения на сумму двух функций.

5. $$\int\frac{xdx}{8x-x^2-7}=\int\frac{xdx}{-(x^2-2\cdot4\cdot x+16)+16-7}=\int\frac{xdx}{9-(x-4)^2}=$$

$$=[z=x-4;\ x=z+4;\ dx=dz]=\int\frac{(z+4)dz}{9-z^2}=\int\frac{zdz}{9-z^2}+\int\frac{4dz}{9-z^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2zdz}{9-z^2}+4\int\frac{dz}{9-z^2}=\left[d\left(9-z^2\right)=-2zdx\right]=-\frac{1}{2}\int\frac{d(9-z^2)}{9-z^2}+$$

$$+4\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{z+3}{z-3}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|9-z^2\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{z+3}{z-3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|8x-x^2-7\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x-7}\right|+C$$

6. $$\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{8-2x^2+6x}}=\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{-2(x^2-3x-4)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{-(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+\frac{9}{4}+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x-\frac{3}{2})^2}}=$$

$$=\left[z=x-\frac{3}{2};\ x=z+\frac{3}{2};\ dx=dz\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(4(z+\frac{3}{2})-1)dz}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(4z+5)dz}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\int\frac{4zdz}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}}+\int\frac{5dz}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}})=$$

$$=\left[d\left(\frac{25}{4}-z^2\right)=-2zdz\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\int\frac{d(\frac{25}{4}-z^2)}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}}+5\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}})=\left[t=\frac{25}{4}-z^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\int t^{-\frac{1}{2}}dt+5\arcsin\frac{2z}{5})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-4\sqrt{t}+5\arcsin\frac{2z}{5})+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-4\sqrt{\frac{25}{4}-z^2}+5\arcsin\frac{2z}{5})+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-4\sqrt{-x^2+3x+4}+5\arcsin\frac{2x-3}{5})+C$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$

2. $\int \frac{dx}{-3x^2-18x+27}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+12{,}5}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{10x-2x^2+4}}$

5. $\int \frac{(1-x)dx}{4x^2-4x-5}$

6. $\int \frac{(5x+3)dx}{x^2+12x+43}$

7. $\int \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{1-x^2+6x}}$

8. $\int \frac{(2+3x)dx}{\sqrt{x^2-10x+8}}$

Индивидуальное задание № 3. Вычислите интегралы, применяя выделение полного квадрата.

1

1.1 $\int \frac{dx}{x^2+6x+15}$

1.2 $\int \frac{dx}{8x-x^2+2}$

1.3 $\int \frac{dx}{9-4x-x^2}$

1.4 $\int \frac{dx}{2x^2+8x-14}$

1.5 $\int \frac{dx}{8x-2x^2+6}$

1.6 $\int \frac{dx}{x^2+3x-8}$

1.7 $\int \frac{dx}{5x-x^2+2}$

1.8 $\int \frac{dx}{4-7x-x^2}$

1.9 $\int \frac{dx}{2-3x^2+9x}$

1.16 $\int \frac{dx}{x^2-8x+3}$

1.17 $\int \frac{dx}{2-3x^2+5x}$

1.18 $\int \frac{dx}{5-2x^2+8x}$

1.19 $\int \frac{dx}{6x^2-2x+5}$

1.20 $\int \frac{dx}{3x-5x^2+8}$

1.21 $\int \frac{dx}{4x^2-5x+7}$

1.22 $\int \frac{dx}{7x^3+2x-5}$

1.23 $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$

1.24 $\int \frac{dx}{-3x^2-x+1}$

1.10 $\int \frac{dx}{x^2-16x+5}$

1.11 $\int \frac{dx}{6x-x^2+19}$

1.12 $\int \frac{dx}{5x^2-4x-3}$

1.13 $\int \frac{dx}{-5x^2+4x-5}$

1.14 $\int \frac{dx}{2-x^2+5x}$

1.15 $\int \frac{dx}{3-7x^2+4x}$

1.25 $\int \frac{dx}{x^2-3x+4}$

1.26 $\int \frac{dx}{2x-x^2+5}$

1.27 $\int \frac{dx}{3-5x-2x^2}$

1.28 $\int \frac{dx}{x+7-x^2}$

1.29 $\int \frac{dx}{2x^2+5x-4}$

1.30 $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

2

2.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$

2.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+5}}$

2.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9x+4}}$

2.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+12x+8}}$

2.5 $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-x^2+9}}$

2.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x-12}}$

2.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{8-5x-x^2}}$

2.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+12x+1}}$

2.16 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x-8}}$

2.17 $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}$

2.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+2}}$

2.19 $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2+10}}$

2.20 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+6x+10}}$

2.21 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x-9}}$

2.22 $\int \frac{dx}{\sqrt{10-4x-x^2}}$

2.23 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-x^2+3}}$

2.9 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-11x+3}}$

2.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{12-7x-x^2}}$

2.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2-6x+12}}$

2.12 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14x-2}}$

2.13 $\int \frac{dx}{\sqrt{14-7x+x^2}}$

2.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2-10x+2}}$

2.15 $\int \frac{dx}{\sqrt{10-4x-2x^2}}$

2.24 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-x^2+4}}$

2.25 $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+8x+2}}$

2.26 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-13}}$

2.27 $\int \frac{dx}{\sqrt{14+5x-x^2}}$

2.28 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x+x^2}}$

2.29 $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2-6x+12}}$

2.30 $\int \frac{dx}{\sqrt{15-9x-x^2}}$

3

3.1 $\int \frac{(3x-4)}{2x^2-5x+4}dx$

3.2 $\int \frac{(x-7)}{4x^2-3x-5}dx$

3.3 $\int \frac{(2x-1)}{5x^2-2x+3}dx$

3.4 $\int \frac{(x-4)}{2x^2-x+5}dx$

3.5 $\int \frac{(4x+3)}{5x^2-x+2}dx$

3.6 $\int \frac{(2x-3)}{3x^2+2x-1}dx$

3.7 $\int \frac{(3x-1)}{2x^2-15x+3}dx$

3.16 $\int \frac{(6+7x)}{6x-5x^2+2}dx$

3.17 $\int \frac{(7-4x)}{3x^2-5x+2}dx$

3.18 $\int \frac{(5x-4)}{2x^2-8x-3}dx$

3.19 $\int \frac{(3x+5)}{x-4x^2+5}dx$

3.20 $\int \frac{(16x+1)}{3x^2-2x+5}dx$

3.21 $\int \frac{(7x+5)}{x-x^2+15}dx$

3.22 $\int \frac{(3x-4)}{3x-2x^2+8x}dx$

3.8 $\int \frac{2x+5}{4x^2+3x+5}dx$

3.9 $\int \frac{(3-x)}{3x^2-2x+4}dx$

3.10 $\int \frac{(2-5x)}{3x-x^2+5}dx$

3.11 $\int \frac{(2x-1)}{4-3x^2+5x}dx$

3.12 $\int \frac{(3x+2)}{4x-x^2+6}dx$

3.13 $\int \frac{(7x-1)}{3-x^2+5x}dx$

3.14 $\int \frac{(5x+2)}{x^2+7x-1}dx$

3.15 $\int \frac{(2-3x)}{3-x^2+6x}dx$

3.23 $\int \frac{(4x-7)}{-x^2+5x-2}dx$

3.24 $\int \frac{(2x-1)}{5x^2-7x+12}dx$

3.25 $\int \frac{(x-3)}{3x-4x^2+7}dx$

3.26 $\int \frac{(2x+11)}{4x^2+2x-1}dx$

3.27 $\int \frac{(3x+8)}{x-3x^2+5}dx$

3.28 $\int \frac{(4x-1)}{8x^2-2x+5}dx$

3.29 $\int \frac{(3x+2)}{4x^2-5x+7}dx$

3.30 $\int \frac{(2x-1)}{x-6x^2+1}dx$

4

4.1 $\int \frac{x-3}{\sqrt{4x-4x^2+7}}dx$

4.2 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{12x+4x^2-5}}dx$

4.3 $\int \frac{4x-2}{\sqrt{4x-x^2+6}}dx$

4.4 $\int \frac{5x+1}{\sqrt{3x-x^2+4}}dx$

4.5 $\int \frac{3-x}{\sqrt{2x^2-4x-5}}dx$

4.6 $\int \frac{2+3x}{\sqrt{5x^2+5x-8}}dx$

4.16 $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x-2x^2+4}}dx$

4.17 $\int \frac{3x-1}{\sqrt{6x+3x^2-5}}dx$

4.18 $\int \frac{2x+4}{\sqrt{10x+5x^2-6}}dx$

4.19 $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-4x+7}}dx$

4.20 $\int \frac{1+x}{\sqrt{3x-3x^2+10}}dx$

4.21 $\int \frac{5-x}{\sqrt{5x-5x^2+10}}dx$

4.7 $\int \frac{6-x}{\sqrt{9x-3x^2+4}}dx$

4.8 $\int \frac{x+9}{\sqrt{7x^2-14x+21}}dx$

4.9 $\int \frac{7x+1}{\sqrt{18x-9x^2+27}}dx$

4.10 $\int \frac{8x+4}{\sqrt{16x-4x^2+4}}dx$

4.11 $\int \frac{6x+2}{\sqrt{10x+2x^2-8}}dx$

4.12 $\int \frac{2+3x}{\sqrt{3x+9x^2+27}}dx$

4.13 $\int \frac{12x-3}{\sqrt{4x+6x^2-6}}dx$

4.14 $\int \frac{3x}{\sqrt{6x-9x^2+27}}dx$

4.15 $\int \frac{2-4x}{\sqrt{4x-8x^2+8}}dx$

4.22 $\int \frac{x-10}{\sqrt{10x+5x^2-11}}dx$

4.23 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5x-x^2+5}}dx$

4.24 $\int \frac{1-4x}{\sqrt{8x+2x^2+12}}dx$

4.25 $\int \frac{5x-10}{\sqrt{5x-x^2+15}}dx$

4.26 $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2+16}}dx$

4.27 $\int \frac{-x}{\sqrt{4x+2x^2-10}}dx$

4.28 $\int \frac{9-x}{\sqrt{9x+x^2-2}}dx$

4.29 $\int \frac{2x}{\sqrt{4x-4x^2+2}}dx$

4.30 $\int \frac{2x-6}{\sqrt{x-2x^2+8}}dx$

3. Интегрирование по частям.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – две функции от x, имеющие непрерывные производные. Известно, что $d(uv)=udv+vdu$. Интегрируя обе части этого равенства, имеем $\int d(uv)=\int udv+\int vdu \Rightarrow$ $\int udv=\int d(uv)-\int vdu$. Так как $\int d(uv)=uv+C$, то

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu. \qquad (5)$$

Эту формулу называют *формулой интегрирования по частям.* Она позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который часто является более простым.

Пример. Найти $\int (x\cdot \sin x)dx$.

Решение. Здесь имеется, по крайней мере, две возможности:

1. $u=\sin x$, $x\cdot dx=dv \Rightarrow v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}$ (за v берём одну из первообразных от функции x); $u=\sin x \Rightarrow du=\cos xdx$. По формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int x\cdot\sin xdx=\frac{x^2}{2}\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cos xdx.$$

В итоге мы пришли к ещё более сложному интегралу, значит, такое разбиение подынтегрального выражения на произведение двух множителей следует признать неудачным.

2. $u=x$, $dv=\sin xdx \Rightarrow du=dx$, $v=\int\sin xdx=-\cos x$.

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x\cdot\sin xdx=-x\cdot\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cdot\cos x+\sin x+C.$$

Замечание. Иногда для получения окончательного результата нужно интегрировать по частям несколько раз.

Рассмотрим основные виды интегралов, которые вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям.

1. Интегралы вида: $\int P(x)e^{kx}dx$; $\int P(x)\sin kxdx$; $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен относительно x, а k – некоторое число. При нахождении этих интегралов считают, что $P(x)=u$.

Пример. $\int x\cdot e^{5x}dx=\left[\begin{array}{ccc} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^{5x}dx & \Rightarrow & v=\int e^{5x}dx=\dfrac{1}{5}e^{5x}\end{array}\right]=$

$$=\frac{x}{5}\cdot e^{5x}-\frac{1}{5}\int e^{5x}dx=\frac{x}{5}\cdot e^{5x}-\frac{e^{5x}}{25}+C.$$

2. Интегралы вида: $\int P(x)\ln xdx$; $\int P(x)\arcsin xdx$; $\int P(x)\arccos xdx$; $\int P(x)\mathrm{arctg}xdx$; $\int P(x)\mathrm{arcctg}xdx$, где $P(x)$ –

многочлен относительно x. Во всех перечисленных случаях за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P(x)$.

Пример.

$$\int x\cdot \operatorname{arcctg}x dx=\left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arcctg}x \;\Rightarrow & du=(\operatorname{arcctg}x)' dx=-\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx \;\Rightarrow & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2\cdot\operatorname{arcctg}x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{x^2\cdot\operatorname{arcctg}x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx==\frac{x^2\cdot\operatorname{arcctg}x}{2}+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{x^2\cdot\operatorname{arcctg}x}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x+C.$$

3. Интегралы вида: $\int e^{ax}\cos bxdx$; $\int e^{ax}\sin bxdx$, где a и b – действительные числа, а также интегралы $\int\cos(\ln x)dx; \int\sin(\ln x)dx$. Путем двукратного интегрирования по частям для этих интегралов получают линейные уравнения, в которых неизвестным выступает искомый интеграл.

Пример. $\int e^{2x}\cos 3xdx=\left[\begin{array}{c} u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos 3xdx\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right]=$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2e^{2x}dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{c} u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin 3xdx\Rightarrow v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx$$

Пусть $\int e^{2x}\cos 3x dx = t$, тогда

$$t = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}t,$$

$$\frac{13}{9}t = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x,$$

$$t = \frac{3}{13}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\right) + C.$$

Замечание. Для двух первых интегралов третьего типа возможен и другой вариант выбора u и dv. В последнем примере можно принять $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x}dx$.

Практическое занятие № 5. Вычисление интегралов с помощью формулы интегрирования по частям.

Примеры вычисления интеграла с помощью формулы интегрирования по частям:

1.

$$\int x\cdot\sin 3x dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin 3x dx & \Rightarrow & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{9}\cdot\sin 3x + C$$

2. $$\int\left(8 - x^2\right)\cdot e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 8 - x^2 & \Rightarrow & du = -2xdx \\ dv = e^{3x}dx & \Rightarrow & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\cdot\left(8 - x^2\right) - \int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot(-2x)dx = \frac{e^{3x}\cdot\left(8 - x^2\right)}{3} + \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot xdx = I$$

Вычислим отдельно интеграл $\int e^{3x}\cdot xdx$. Для этого опять воспользуемся методом интегрирования по частям.

$$\int x\cdot e^{3x}dx=\begin{bmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^{3x}dx & \Rightarrow & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{bmatrix}=$$

$=\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\int\frac{1}{3}e^{3x}dx=\frac{x\cdot e^{3x}}{3}-\frac{1}{9}\cdot e^{3x}$. Подставим полученное значение в исходный интеграл $I=\frac{e^{3x}\cdot\left(8-x^2\right)}{3}+\frac{2x\cdot e^{3x}}{9}-\frac{2}{27}\cdot e^{3x}+C$.

3. $$\int\arcsin x dx=\begin{bmatrix} u=\arcsin x & \Rightarrow & du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx & \Rightarrow & v=x\end{bmatrix}=$$

$$=x\cdot\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

4.

$$\int\left(4x^3+6x-7\right)\cdot\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & \Rightarrow & du=\frac{dx}{x} \\ dv=\left(4x^3+6x-7\right)dx & \Rightarrow & v=x^4+3x^2-7x\end{bmatrix}=$$

$$=\ln x\cdot\left(x^4+3x^2-7x\right)-\int\left(x^4+3x^2-7x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(x^4+3x^2-7x\right)\cdot\ln x-\int\left(x^3+3x-7\right)dx=$$

$$=\left(x^4+3x^2-7x\right)\cdot\ln x-\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+7x+C$$

5. $$\int\left(x^2+3x\right)\cdot\ln^2 x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\ln^2 x & \Rightarrow & du=\frac{2\ln x}{x}dx \\ dv=\left(x^2+3x\right)dx & \Rightarrow & v=\int\left(x^2+3x\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\ln^2 x-\frac{1}{3}\int\frac{\left(2x^3+9x^2\right)\ln x}{x}dx=$$

$$=\frac{2x^3+9x^2}{6}\cdot\ln^2 x-\frac{1}{3}\int\left(2x^2+9x\right)\ln x dx = I$$

Интеграл $\int\left(2x^2+9x\right)\ln x dx$ также вычислим по частям.

$$\int\left(2x^2+9x\right)\ln x dx=\left[\begin{array}{ccc} u=\ln x & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\left(2x^2+9x\right)dx & \Rightarrow & v=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{9x}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\ln x-\frac{2x^3}{9}-\frac{9x^2}{4}.$$

Таким образом, исходный интеграл примет вид:

$$I=\frac{2x^3+9x^2}{6}\ln^2 x-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\cdot\ln x-\frac{2x^3}{9}-\frac{9x^2}{4}\right)+C=.$$

$$=\frac{2x^3+9x^2}{6}\ln^2 x-\left(\frac{2x^3}{9}+\frac{3x^2}{2}\right)\cdot\ln x+\frac{2x^3}{27}+\frac{3x^2}{4}+C.$$

6. $\int\sin\left(\ln x\right)dx=\left[\begin{array}{c} u=\sin\left(\ln x\right)\Rightarrow du=\cos(\ln x)\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \qquad \Rightarrow \qquad v=x\end{array}\right]=$

$$=x\sin\left(\ln x\right)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx=x\sin\left(\ln x\right)-\int\cos(\ln x)dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c} u=\cos\left(\ln x\right)\Rightarrow du=-\sin(\ln x)\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \qquad \Rightarrow \qquad v=x\end{array}\right]=$$

$$= x\sin(\ln x) - \left(x\cos\left(\ln x\right) - \int x\left(-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\right)dx \right) =$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos\left(\ln x\right) - \int \sin(\ln x)dx\,.$$

Пусть $\int \sin\left(\ln x\right)dx = t$.

Тогда имеем уравнение $t = x\sin(\ln x) - x\cos\left(\ln x\right) - t$, откуда последовательно получаем:

$$2t = x\sin(\ln x) - x\cos\left(\ln x\right),$$

$$t = \frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos\left(\ln x\right)\right) + C\,.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int x \cdot \cos\left(5x-3\right)dx$
2. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x^5}}$
3. $\int \left(x-5\right)\cdot 8^{x-7}\,dx$
4. $\int \frac{\ln\left(\cos x\right)}{\cos^2 x}dx$
5. $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$
6. $\int \sqrt{x}\cdot\cos x dx$
7. $\int \left(3x+7\right)\cdot \sin 5x dx$
8. $\int \arcsin^2 x dx$
9. $\int \cos\left(\ln x\right)dx$
10. $\int \left(x^2+3x+5\right)\cdot e^x dx$

Индивидуальное задание № 4. Вычислите интегралы, применяя формулу интегрирования по частям.

1. $\int \left(5x-7\right)\cdot \mathrm{arcctg}3x\,dx$
2. $\int x^3 \cdot \ln x\,dx$
3. $\int \left(x^2+4x-9\right)\sin x\,dx$
4. $\int \ln\left(\frac{3x+4}{3x-4}\right)dx$
5. $\int x^2 \cos 5x\,dx$
16. $\int x\cdot\cos\left(5x+4\right)dx$
17. $\int \frac{5x+2}{\sin^2 x}dx$
18. $\int \frac{3x-1}{\cos^2 x}dx$
19. $\int \ln\left(7x+8\right)dx$
20. $\int \left(2x+7\right)\cdot e^{-3x}dx$

6. $\int \frac{x \cdot \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

7. $\int \left(x^2+4\right)\cdot e^{7x} dx$

8. $\int \left(x^2+x\right)\cdot 5^x dx$

9. $\int (3x+16)\cdot \sin 5x \, dx$

10. $\int (x+7)\cdot \sin \frac{x}{5} dx$

11. $\int x^3 \ln^2 x \, dx$

12. $\int \arcsin 5x \, dx$

13. $\int x \cdot 4^{x+1} dx$

14. $\int \arccos 9x \, dx$

15. $\int (x+3)\cdot \mathrm{arctg} x \, dx$

21. $\int \ln(4x-13) dx$

22. $\int x \cdot \cos 6x \, dx$

23. $\int \left(x^2+5\right)\cdot \arccos x \, dx$

24. $\int \mathrm{arctg} \frac{3x}{4} dx$

25. $\int (x+3)\cdot 3^x dx$

26. $\int \frac{x \cdot \arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$

27. $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$

28. $\int \left(x^2-3x+15\right)\cos x \, dx$

29. $\int \ln\left(\frac{4x+1}{4x-1}\right) dx$

30. $\int (x-4)\cdot e^{-2x} dx$

§ 3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. Целой рациональной функцией (или многочленом) называется функция вида $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, где n – натуральное число, называемое *степенью многочлена*; a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$, a_n – действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена.

Например, $y = 5x+1$, $y = x^2 - 8x + 3$, $y = -3x^3 + x - 1$.

Определение. Дробной рациональной функцией или *просто рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов: $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Например, $f(x)=\dfrac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$.

Определение. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого нужно поделить числитель на знаменатель.

Например, пусть $f(x)=\dfrac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$. Разделив x^4+5x^3-6x+5 на x^3+2x-1, получим $f(x)=x+5+\dfrac{-2x-15x+10}{x^3+2x-1}$.

Из последнего утверждения следует, что интегрирование неправильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, то есть $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx=\int L(x)dx+\int\dfrac{R(x)}{Q(x)}dx$.

Интегрировать многочлен мы умеем, следовательно, осталось научиться интегрировать правильные рациональные дроби.

Позже мы покажем, как всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших дробей* следующих четырёх видов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $\quad n=2,3,\ldots$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ $\quad n=2,3,\ldots,$

где A, a, p, q, M и N – действительные числа, а трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то есть $\dfrac{p^2}{4}-q<0$. Следовательно, для интегрирования рациональных дробей надо уметь интегрировать простейшие дроби. Интегралы от дробей первых двух типов вычисляются довольно просто:

I. $\displaystyle\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

II. $\displaystyle\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$.

III. Для интегрирования $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Так как по условию трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то $q-\dfrac{p^2}{4}>0$. Поэтому можно обозначить $q-\dfrac{p^2}{4}=a^2$. Производя замену $t=x+\dfrac{p}{2}$, получаем $x=t-\dfrac{p}{2}$, $dx=dt$. Следовательно, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Пример. Найти $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx$.

Решение. Пусть $t=x+1$ (так как $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$), тогда $x=t-1$, $dx=dt$.

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3t-3+5}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}+2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(t^2+9\right)+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right)+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

IV. Рассмотрим интегралы вида $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$. Как и для предыдущего интеграла, введём новую переменную $t=x+\frac{p}{2}$ $\Rightarrow$ $x=t-\frac{p}{2}$; $dx=dt$; $x^2+px+q=t^2+a^2$, где $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Следовательно,

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(N+\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n};$$

$$\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-n}}{1-n}+C=$$

$$=\frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+C.$$

Остаётся вычислить

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2 + t^2) - t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}\right) \tag{6}$$

Интеграл $\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}$ вычисляем по частям:

$$u = t \;\Rightarrow\; du = dt\,, \;\; dv = \frac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}}\,;$$

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n} = \frac{t}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}\,.$$

Подставляя в (6) найденное выражение для интеграла $\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + a^2\right)^n}$, получаем:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} \cdot I_{n-1}\right]$$

или

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2n}{2-2n} \cdot I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)\left(t^2 + a^2\right)^{n-1}}\right]. \tag{7}$$

Формула (7) называется формулой *приведения,* так как она приводит I_n к интегралу I_{n-1}, затем I_{n-1} к I_{n-2} и т. д.

§ 4. Интегрирование рациональных дробей общего вида

Определение. Корнем многочлена $P(x)$ называется число α (действительное или комплексное), такое, что $P(\alpha)=0$.

Например, для многочлена x^3+x^2-2x-8 число $\alpha=2$ является корнем, так как $2^3+2^2-2\cdot 2-8=0$. Для многочленов имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n линейных множителей вида $x-\alpha$ и постоянного числа a_0 – коэффициента при старшей степени x, т. е. $P(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ являются корнями многочлена $P(x)$.

Например, легко проверить, раскрывая скобки, что $5x^4-40x^3+115x^2-140x+60=5(x-2)(x-2)(x-1)(x-3)$ или $x^3+x^2+9x+9=(x-1)(x-3i)(x+3i)$.

Среди линейных множителей, на которые разложен многочлен, могут быть одинаковые. Объединяя в разложении многочлена одинаковые множители, его можно записать в виде

$$P(x)=a_0(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\ldots(x-l)^{k_s} \qquad (8),$$

где все корни $a, b, \ldots, l$ различны и $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Определение. Корень a многочлена $P(x)$, для которого линейный множитель $x-a$ в разложении (8) встречается k_1 раз, называется *корнем кратности* k_1. Корень кратности один называется простым.

В алгебре доказывается, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет корнем комплексное число $\gamma=\alpha+\beta i$ кратности k, то сопряжённое комплексное число $\bar{\gamma}=\alpha-\beta i$ также является корнем многочлена той же кратности.

Отсюда следует, что если в разложении имеется множитель $(x-\gamma)^k$, то в этом разложении имеется и множитель $(x-\bar{\gamma})^k$. Перемножая эти два множителя, получаем:

$$(x-\gamma)^k (x-\bar{\gamma})^k = (x-\alpha-\beta i)^k (x-\alpha+\beta i)^k =$$
$$=\big(((x-\alpha)-\beta i)((x-\alpha)+\beta i)\big)^k = \left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^k =$$
$$=\left(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2\right)^k = \left(x^2+px+q\right)^k, \text{ где } p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2.$$

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряжённым корням, можно заменить квадратным трёхчленом с действительными коэффициентами (этот трёхчлен не имеет действительных корней). Поэтому всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в таком виде:

$$P(x)=a_0(x-a)^{t_1}(x-b)^{t_2}\ldots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{k_2}\ldots$$

Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, где знаменатель $Q(x)$ имеет вид $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\left(x^2+px+q\right)^m$, причем квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. Тогда имеет место следующее *правило*.

Правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^l\left(x^2+px+q\right)^m$, можно единственным образом разложить в сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}, \qquad (9)$$

где все A_i, B_j, M_s, N_s – действительные числа. Из формулы (9) видно, что линейным множителям знаменателя $Q(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типа, а квадратичным множителям – простейшие дроби III и IV типа.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратичному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители. Правило разложения правильной рациональной дроби остаётся справедливым при любом конечном числе линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q(x)$.

Для определения коэффициентов в разложении (9) правильной дроби на простейшие используют чаще всего *метод неопределённых коэффициентов*. Поясним его на примерах.

Пример. Разложить $\dfrac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$ на простейшие дроби.

Решение. По формуле (9) имеем:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{A_1(x-1)(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Так как знаменатели равны, то равны и числители: $x^2-5x+9=$

$$=A_1\left(x^3-x^2+2x^2-2x+2x-2\right)+A_2\left(x^2+2x+2\right)+(Mx+N)\left(x^2-2x+1\right)$$

или $x^2-5x+9=$

$$=(A_1+M)x^3+(A_1+A_2+N-2M)x^2+(2A_2+M-2N)x+(-2A_1+2A_2+N).$$

Два многочлена тогда и только тогда тождественно равны друг другу, когда коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Отсюда получаем систему $\begin{cases} A_1+M=0 \\ A_1+A_2+N-2M=1 \\ 2A_2+M-2N=-5 \\ -2A_1+2A_2+N=9 \end{cases}$, решая которую, находим $A_1=-\dfrac{7}{5}, A_2=1, M=\dfrac{7}{5}, N=\dfrac{21}{5}$.

Таким образом,

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7x+21}{5(x^2+2x+2)}.$$

Пример. Разложить выражение $\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ на сумму простейших дробей.

Решение. $\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$,

$$2x^2+10x-18 = A\left(x^2-x-6\right)+B\left(x^2-4x+3\right)+C\left(x^2+x-2\right),$$

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -A-4B+C=10 \\ -6A+3B-2C=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=3 \end{cases}.$$

Таким образом, $\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$.

Часто нахождение коэффициентов разложения можно упростить. Рассмотрим последний пример.

$$2x^2+10x-18 = A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2) \quad (10)$$

Записанное равенство должно выполняться тождественно, то есть при любом значении x. Тогда можно подобрать такое значение x, при подстановке которого в равенство (10) легко вычисляются искомые коэффициенты. Проще всего за x принять один из корней знаменателя.

При $x=1$ получим: $2+10-18 = A\cdot 3\cdot(-2) \Rightarrow -6A=-6 \Rightarrow A=1$.

При $x=-2$: $8-20-18 = B\cdot(-3)\cdot(-5) \Rightarrow 15B=-30 \Rightarrow B=-2$.

При $x=3$: $18+30-18 = C\cdot 2\cdot 5 \Rightarrow 10C=30 \Rightarrow C=3$.

Указанный метод особенно удобен в случае, когда знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби имеет только простые действительные корни.

Согласно материалу, изложенному выше, можно сформулировать *правило* интегрирования рациональной дроби:

1. Если рациональная дробь неправильная, то её представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Тем самым интегрирование неправильной рациональной дроби сводят к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

2. Раскладывают знаменатель правильной дроби на множители.

3. Правильную рациональную дробь раскладывают на сумму простейших дробей.

Тем самым интегрирование правильной рациональной дроби сводят к интегрированию простейших дробей.

Пример. Найти $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Решение. Под интегралом уже стоит правильная рациональная дробь. Мы её разложили на сумму простейших дробей в предыдущем параграфе:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7x+21}{5(x^2+2x+2)},$$

поэтому

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int\frac{(x+3)}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=-\frac{7}{5}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int\frac{(x+1)+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix}t=x+1\\dt=dx\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{5}\left[\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1}+2\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Практическое занятие № 6. Интегрирование рациональных функций.

Примеры вычисления интегралов от рациональных функций:

1. $\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\int(x-2)+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}dx=$

$=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx$, так как

$$x^3-x^2-8x+12=\left(x^3-4x\right)-\left(x^2-2x\right)-(6x-12)=(x-2)^2(x+3).$$

Разложим дробь $\dfrac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}$ на сумму простейших дробей.

$\dfrac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\dfrac{A}{(x-2)}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x+3)} \quad\Rightarrow\quad A=\dfrac{4}{5};\quad B=2;$ $C=\dfrac{1}{5}$.

Тогда

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$=\dfrac{4}{5}\ln|x-2|-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{5}\ln|x+3|+C.$ Поэтому исходный интеграл будет иметь следующее значение:

$$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^5+7x^3+8x^2-2x+22}{x^4+x^2+6x-8}dx=\int x+\frac{6x^3+2x^2+6x+22}{x^4+x^2+6x-8}dx=$

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{6x^3+2x^2+6x+22}{(x-1)(x+2)\left(x^2-x+4\right)}dx.$$

Разложим дробь $\dfrac{6x^3+2x^2+6x+22}{(x-1)(x+2)\left(x^2-x+4\right)}$ на сумму простейших дробей: $\dfrac{6x^3+2x^2+6x+22}{(x-1)(x+2)\left(x^2-x+4\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+4}$. Приведем правую часть последнего равенства к общему знаменателю, откуда получим

$6x^3+2x^2+6x+22=A\left(x^2-x+4\right)(x+2)+B\left(x^2-x+4\right)(x-1)+$

$+(Cx+D)(x-1)(x+2)$. Подставляя в левую и правую часть этого равенства последовательно $x=1, x=-2, x=0, x=-1$, приходим к системе $\begin{cases} 36=12A, \\ -30=-30B, \\ 22=8A-4B-2D, \\ 12=6A-12B+2C-2D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3, \\ B=1, \\ C=2, \\ D=-1. \end{cases}$ Поэтому

$$\int\frac{x^5+7x^3+8x^2-2x+22}{x^4+x^2+6x-8}dx=\frac{x^2}{2}+3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{2x-1}{x^2-x+4}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+\ln|x+2|+\int\frac{2x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}dx=$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}=t;\ x=t+\frac{1}{2};\ dx=dt\right]=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+\ln|x+2|+$$

$$+\int\frac{2t}{t^2+\frac{15}{4}}dt=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+\ln|x+2|+\int\frac{d\left(t^2+\frac{15}{4}\right)}{t^2+\frac{15}{4}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+\ln|x+2|+\ln\left(t^2+\frac{15}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+\ln|x+2|+\ln\left(x^2-x+4\right)+C.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int\frac{10x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$
2. $\int\frac{x^4-4x^2+10x+3}{(x-1)^3\left(x^2+x+3\right)}dx$
3. $\int\frac{3x+5}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$

Индивидуальное задание № 5. Вычислите интегралы, применяя разложение функции на сумму простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{2x^5+2x^4+2x^3+21x^2-35x-52}{x^4+x^3+13x-15}dx$

2. $\int \frac{x^5-2x^4+2x^3-11x^2+23x-38}{x^4-2x^3+x^2+8x-20}dx$

3. $\int \frac{-x^5-6x^4-9x^3+21x+35}{x^4+6x^3+15x^2+22x+12}dx$

4. $\int \frac{-2x^5+6x^4+6x^3+12x^2-57x-79}{x^4-3x^3+x^2-13x+30}dx$

5. $\int \frac{3x^5-15x^4+18x^3-18x^2-4x-20}{x^4-5x^3+6x^2-4x-16}dx$

6. $\int \frac{5x^5+24x^4+6x^3-79x^2-23x+90}{x^4+5x^3+2x^2-20x-24}dx$

7. $\int \frac{2x^5+x^4-8x^3-3x^2+7x+9}{x^4-x^3-3x^2+x+2}dx$

8. $\int \frac{x^5-10x^4+31x^3-33x^2+2x+5}{x^4-6x^3+9x^2+4x-12}dx$

9. $\int \frac{2x^5+3x^4-13x^3-6x^2+36x-10}{x^4+3x^3-3x^2-7x+6}dx$

10. $\int \frac{3x^5-4x^4-46x^3+76x^2+14x+139}{x^4-x^3-17x^2+21x+36}dx$

11. $\int \frac{4x^5+15x^4+11x^3-6x^2+17x-1}{4x^4+15x^3+9x^2+x+3}dx$

12. $\int \frac{8x^5-28x^4+37x^3-24x^2+19x-4}{4x^4-14x^3+16x^2-10x+4}dx$

13. $\int \frac{-4x^5+7x^4+15x^3-48x^2+11x-21}{4x^4-7x^3-20x^2+17x-6}dx$

14. $\int \frac{-8x^5-2x^4+25x^3+51x^2+20x+4}{4x^4+x^3-14x^2-4x-8}dx$

15. $\int \frac{4x^5+10x^4+5x^3+51x^2+17x+21}{4x^4+10x^3-5x^2-9}dx$

16. $\int \frac{2x^5+2x^4-13x^3+10x^2+7x}{x^4+2x^3-4x^2-2x+3}dx$

17. $\int \frac{-x^5+x^4+18x^3+7x^2-31x-26}{x^4+4x^3+2x^2-4x-3}dx$

18. $\int \frac{x^5-9x^3+9x^2+58x+45}{x^4+2x^3-7x^2-20x-12}dx$

19. $\int \frac{-2x^5+17x^4-55x^3+83x^2-56x+11}{x^4-8x^3+23x^2-28x+12}dx$

20. $\int \frac{3x^5+8x^4-13x^3-16x^2+31x-1}{x^4+3x^3-3x^2-7x+6}dx$

21. $\int \frac{-2x^5+2x^4+10x^3-42x^2+51x-27}{x^4-x^3-5x^2+15x-18}dx$

22. $\int \frac{x^5-x^4-3x^3+x^2+2x-30}{x^4-x^3-5x^2+15x-18}dx$

23. $\int \frac{-x^5+7x^4-16x^3+23x^2-9x-46}{x^4-7x^3+17x^2-26x+24}dx$

24. $\int \frac{x^5-5x^4+10x^3-26x^2+35x-16}{x^4-5x^3+5x^2-10x+24}dx$

25. $\int \frac{2x^5-8x^4+6x^3-16x^2+26x-25}{x^4-4x^3+2x^2-11x+12}dx$

26. $\int \frac{x^5-x^3+2x^2+4x+6}{x^4+x^3-3x^2-x+2}dx$

27. $\int \frac{x^5+2x^4+x^3+4x^2+6x-2}{x^4+3x^3+x^2-3x-2}dx$

28. $\int \frac{-x^5+2x^4+2x^3+6x-4}{x^4-x^3-6x^2+4x+8}dx$

29. $\int \frac{x^5-x^3+3x^2+7x+8}{x^4+x^3-3x^2-x+2}dx$

30. $\int \frac{-x^5-2x^4-x^3+x^2-x-8}{x^4+3x^3+x^2-3x-2}dx$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

Приёмы, применяемые при интегрировании тригонометрических функций, зависят от вида этих функций.

I. Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$, где $m, n \in Z$.

Рассмотрим случай, когда одно из чисел n или m нечётно. В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций путем внесения под знак дифференциала той тригонометрической функции, которая стоит в нечетной степени, и введением новой переменной.

Пример. Найти $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 dx$.

Решение. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x d(\cos x) =$

$$= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos^4 x d(\cos x) = [z = \cos x] = -\int \left(1 - 2z^2 + z^4\right) z^4 dz =$$

$$= -\int \left(z^4 - 2z^6 + z^8\right) dz = -\left(\frac{z^5}{5} - 2\frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}\right) + C = -\frac{z^5}{5} + \frac{2}{7} z^7 - \frac{z^9}{9} + C =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Этот же метод применим и в том случае, когда одно из чисел n или m нечётно и положительно, а другое – любое действительное число.

Пример. Найти $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x dx$.

Решение. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x dx = -\int \cos^{\frac{2}{3}} x \left(1 - \cos^2 x\right) d(\cos x) =$

$$= [z = \cos x] = -\int z^{\frac{2}{3}} \left(1 - z^2\right) dz = -\int \left(z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{8}{3}}\right) dz =$$

$$= -\left(\frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11} z^{\frac{11}{3}}\right) + C = -\frac{3}{5}(\cos x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{11}(\cos x)^{\frac{11}{3}} + C.$$

Замечание. Как известно, первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Это следует учитывать при интегрировании тригонометрических функций, так как в зависимости от метода интегрирования можно получить различные по форме ответы.

Например, с одной стороны, $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, а с другой стороны, $\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cdot \cos x\, dx = 2\int \sin x\, d\left(\sin x\right) =$
$= 2\frac{\sin^2 x}{2} + C = \sin^2 x + C$.

Два разных на первый взгляд ответа означают, что эти выражения отличаются на постоянную величину. Действительно:
$-\frac{1}{2}\cos 2x + C = -\frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + C = -\frac{1}{2} + \sin^2 x + C = \sin^2 x + C_1$.

Пусть теперь в интеграле вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$ оба показателя n и m – чётные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю).

Применяя известные формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, можно добиться того, что произведение $\sin^n x \cdot \cos^m x$ заменится суммой произведений подобного вида, но с меньшими показателями степеней.

Пример. Найти $\int \cos^2 x dx$.

Решение. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Пример. Найти $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$.

Решение. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d\left(\sin 2x\right) = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\int \cos 4x\, d\left(4x\right) -$$

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

Пример. $\int\cos^6 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^3 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx=$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+3\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\int\cos^2 2x\cdot\cos 2xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}\int\cos 4xd(4x)+\frac{1}{2}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d(\sin 2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C=$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

Если в подынтегральной функции $\sin x$ или $\cos x$ имеют степень большую трёх, то для нахождения таких интегралов можно использовать рекуррентную формулу. Вывод этой формулы приведён ниже.

$$\int\cos^n xdx=\int\cos^{n-2}x\cdot\cos^2 xdx=\int\cos^{n-2}x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$

$$=\int\cos^{n-2}x\,dx-\int\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 xdx$$

Вычислим второй интеграл.

$$\int\cos^{n-2}x\cdot\sin x\cdot\sin xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} u=\sin x\quad\Rightarrow & du=\cos xdx\\ dv=\cos^{n-2}x\cdot\sin xdx\Rightarrow & v=-\int\cos^{n-2}xd(\cos x)=-\dfrac{\cos^{n-1}x}{n-1}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{\sin x\cdot\cos^{n-1}x}{n-1}+\frac{1}{n-1}\int\cos^n xdx.$$

Подставляя полученное выражение вместо второго интеграла, получим:

$$\int cos^n xdx = \int \cos^{n-2} xdx + \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int \cos^n xdx,$$

откуда

$$\frac{n}{n-1}\int \cos^n xdx = \int \cos^{n-2} xdx + \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n-1}.$$

Таким образом, доказана справедливость следующей формулы

$$\int \cos^n xdx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} xdx + \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n}, \text{ где } n = 3;\, 4;...$$

Аналогичная рекуррентная формула выполняется для $\sin^n x$:

$$\int \sin^n xdx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx - \frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n}, \text{ где } n = 3;\, 4;...$$

Пример. Для вычисления следующего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой, а также результатом вычисления интеграла $\int \cos^6 xdx$.

$$\int \cos^8 xdx = \frac{7}{8}\int \cos^6 xdx + \frac{\sin x \cdot \cos^7 x}{8} =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x\right) + \frac{\sin x \cdot \cos^7 x}{8} + C$$

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{\sin^n x}$; $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ используются формулы $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) d\left(\operatorname{ctg} x\right) = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C.$$

II. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональное выражение относительно функций $\sin x$ и $\cos x$.

Сначала определим понятие «рациональное выражение относительно двух функций».

Определение. Многочленом относительно двух переменных u и v называется сумма произведений вида $A \cdot u^n \cdot v^m$, где

A – некоторое действительное число, m и n – целые неотрицательные числа.

Например, $3u^2v + 5u^5v^4 - 5v^3 + 6$.

Определение. Дробь вида $\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ – многочлены относительно u и v, называется рациональной функцией относительно от переменных u и v. Обозначение $R(u,v)$.

Например, $R(u,v) = \dfrac{u^2 - 3v}{u^3 + 2v^2}$.

Нетрудно убедиться в том, что сумма, разность, произведение и частное нескольких рациональных функций от u и v также являются рациональными функциями от u и v.

Определение. Рациональным выражением относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется рациональная функция от u и v, где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Рациональное выражение обозначают $R(\varphi(x), \psi(x))$.

Итак, рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Такими являются, например, интегралы $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x + 2}dx$ или $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$.

Интеграл $\int \sin^{\frac{7}{4}} x \cdot \cos^2 x\, dx$ не является интегралом указанного типа, так как если $\sin x = u$, $\cos x = v$, то $y = u^{\frac{7}{4}} v^2$ не является рациональной функцией.

Всякий интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно свести к интегралу от рациональной функции одной переменной z. Для этого вводят новую переменную $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $\sin x$ и $\cos x$ рационально выражаются через z.

Действительно,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Из равенства $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ x=2\operatorname{arctg}z\ \Rightarrow\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}$.

Таким образом,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2z}{1+z^2};\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}dz.$$

Пример. Найти $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

Пример. Найти $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{1-z^2}=2\int\frac{dz}{(1-z)(1+z)}$.

Раскладываем подынтегральное выражение на сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{(1-z)(1+z)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1+z}\ \Rightarrow\ 1=A(1+z)+B(1-z)$$

Из последнего равенства при $z=1$ получаем $1=2A\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{2}$, при $z=-1$ имеем $1=2B \Rightarrow B=\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{1}{(1-z)(1+z)}=\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1}{2(1+z)}$. Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int\frac{dx}{\cos x}=2\int\frac{dz}{(1-z)(1+z)}=\int\frac{dz}{1-z}+\int\frac{dz}{1+z}=$$

$$=-\int\frac{d(1-z)}{1-z}+\int\frac{d(1+z)}{1+z}=-\ln|1-z|+\ln|1+z|+C=\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C==\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{(5\sin x-4)dx}{1-2\sin x+\cos x}=\int\left(\frac{5\cdot 2t}{1+t^2}-4\right):\left(1-\frac{4t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int\frac{5t-2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}:\left(\frac{1+t^2-4t+1-t^2}{1+t^2}\right)dt=-4\int\frac{\left(2t^2-5t+2\right)}{\left(1+t^2\right)(2-4t)}dt=$$

$$=-2\int\frac{(t-2)\cdot(2t-1)}{\left(1+t^2\right)(1-2t)}dt=2\int\frac{t-2}{1+t^2}dt=\int\frac{2tdt}{1+t^2}-4\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{d(t^2+1)}{1+t^2}-4\operatorname{arctg}t=\ln\left(t^2+1\right)-4\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)-4\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C=-\ln\cos^2\frac{x}{2}-2x+C.$$

Заменой $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ всегда можно привести к интегралу от рациональной функции, но часто это ведёт к слишком громоздким вычислениям. Поэтому, если это возможно, следует пользоваться другими методами, например из пункта I.

Рассмотрим ещё один частный случай функции $R(\sin x, \cos x)$, а именно интеграл $\int R(tgx)dx$, где R – рациональная функция от x. В этом случае $z = \mathrm{tg}x \Rightarrow x = \mathrm{arctg}z \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$. Тогда $\int R(\mathrm{tg}x)\,dx = \int R(z)\dfrac{dz}{1+z^2}$.

Пример. Найти $\int \dfrac{dx}{tgx+1}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{tg}x+1} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{z+1} = \int \frac{dz}{\left(1+z^2\right)(1+z)}$.

Раскладываем подынтегральное выражение на сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)(1+z)} = \frac{A}{1+z} + \frac{Mz+N}{1+z^2};$$

$$1 = A\left(1+z^2\right) + (Mz+N)(1+z).$$

При $z=-1$ получаем $1=2A \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$. Тогда

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 + Mz + Mz^2 + N + Nz;$$

$$1 = \left(\frac{1}{2}+M\right)z^2 + (M+N)z + \frac{1}{2} + N \Rightarrow M = -\frac{1}{2};\ N = \frac{1}{2}.$$

Итак: $\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)(1+z)} = \dfrac{1}{2(1+z)} + \dfrac{1-z}{2\left(1+z^2\right)} \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}x+1} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{z+1} = \int \frac{dz}{\left(1+z^2\right)(1+z)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{2}\int \frac{(1-z)\,dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+z| + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{zdz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\ln|1+z| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}z - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(z^2+1\right)}{z^2+1} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+z|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z-\frac{1}{4}\ln\left(z^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)-$$

$$-\frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+\frac{1}{2}x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+\frac{1}{2}x+C.$$

Замечание. Такой же подстановкой берутся интегралы $\int R(\sin x,\cos x)dx$, если $\sin x$ и $\cos x$ входят только в чётных степенях. Это следует из того, что $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}x$:

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Пример. Найти $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\begin{bmatrix} z=\operatorname{tg}x \\ x=\operatorname{arctg}z \\ dx=\dfrac{dz}{1+z^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{1}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{2+z^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}+C==\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Пример. $\int\frac{\operatorname{tg}x dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\int\frac{t\cdot\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{tdt}{1+t^2}:\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=$

$$=\int\frac{tdt}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(1-t^2\right)}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|+C==-\frac{1}{2}\ln\left|1-\operatorname{tg}^2 x\right|+C.$$

Если для интеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ выполняется равенство $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то можно использовать подстановку $\operatorname{tg} x = t$. При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{5\cos x \cdot \sin x} = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)dx}{5\cos x \cdot \sin x} = \int \frac{\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{dt}{1+t^2}}{5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)\cdot t} = \frac{1}{5}\int \frac{2-\left(t^2+1\right)}{t\left(1+t^2\right)}dt = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln|t| + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}.$$

Второй интеграл вычислим, разложив на сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \Rightarrow 1 = A + At^2 + Bt^2 + Ct \Rightarrow A = 1;$$

$B = -1;\ C = 0$.

Тогда, $\int \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{tdt}{1+t^2} = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + C$.

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int \frac{\cos 2x dx}{5\cos x \cdot \sin x} = -\frac{1}{5}\ln|t| + \frac{2}{5}\ln|t| - \frac{1}{5}\ln\left|1+t^2\right| + C = \frac{1}{5}\ln|t| - \frac{1}{5}\ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{5}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2 x\right| + C.$$

Если выполняется равенство $R(-\sin x;\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$, тогда при условии $x \in [0;\,\pi]$

$$x = \arccos t \;\Rightarrow\; dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};\ \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}\,.$$

Пример. $$\int \frac{\sin x dx}{5-2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{\sqrt{1-t^2}\cdot dt}{-\sqrt{1-t^2}}}{5-2t^2} =$$

$$= -\int \frac{dt}{5-2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{t+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-\sqrt{5}}{\sqrt{2}t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cos x+\sqrt{5}}\right| + C\,.$$

Если выполняется равенство $R(\sin x;-\cos x) = -R(\sin x;\cos x)$, то используется подстановка $\sin x = t$. Тогда при $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \arcsin t \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}\,.$$

Пример.

$$\int \frac{(1-\sin^2 x)dx}{3\cos x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt{1-t^2}} : \frac{3\sqrt{1-t^2}}{1} = \int \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}t + C = \frac{1}{3}\sin x + C\,.$$

III. Для вычисления интегралов вида:

1. $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$;
2. $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$;
3. $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$

одновременно применяются методы интегрирования разложением и замены переменной. Эти интегралы вычисляются методом разложения на основании следующих тригонометрических тождеств:

1. $\sin mx \cdot \cos nx = \dfrac{\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)}{2}$;

2. $\sin mx \cdot \sin nx = \dfrac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}$;

3. $\cos mx \cdot \cos nx = \dfrac{\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx)}{2}$.

Пример. Найти $\int \sin 2x \cdot \cos 6x dx$.

Решение. $\int \sin 2x \cdot \cos 6x dx = \dfrac{1}{2}\int \left(\sin\left(2x+6x\right)+\sin\left(2x-6x\right)\right)dx =$

$= \dfrac{1}{2}\int \sin 8x dx - \dfrac{1}{2}\int \sin 4x dx =$

$= \dfrac{1}{16}\int \sin 8x d\left(8x\right) - \dfrac{1}{8}\int \sin 4x d\left(4x\right) = -\dfrac{1}{16}\cos 8x + \dfrac{1}{8}\cos 4x + C$.

Практическое занятие № 7. Интегрирование тригонометрических функций.

Примеры вычисления интегралов от тригонометрических функций:

1. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x} = -\int \dfrac{d\left(\cos x\right)}{\sin^4 x} = -\int \dfrac{d\left(\cos x\right)}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} = \left[\cos x = t\right] = -\int \dfrac{dt}{\left(1-t^2\right)^2} =$

$= -\int \dfrac{dt}{(1-t)^2(1+t)^2}$

Разложим рациональную функцию на простейшие дроби $\dfrac{1}{(1-t)^2\left(1+t^2\right)} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{(1-t)^2} + \dfrac{C}{1+t} + \dfrac{D}{(1+t)^2}$. Найдём коэффициенты A, B, C, D. Для этого приведём к общему знаменателю правую часть и приравняем числители.

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2$$

Пусть $t=1 \Rightarrow 1=B(1+1)^2 \Rightarrow B=\frac{1}{4}$.

Пусть $t=-1 \Rightarrow 1=4D \Rightarrow D=\frac{1}{4}$.

Пусть $t=2 \Rightarrow$

$$1=A(1-2)(1+2)^2+3^2B+C(1-2)^2(1+2)+D(1-2)^2$$

$$1=-9A+9B+3C+D$$

$$1=-9A+\frac{9}{4}+3C+\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{2}=-9A+3C \Rightarrow -\frac{1}{2}=-3A+C \quad (*)$$

Пусть $t=-2$

$$1=A(1+2)(1-2)^2+B(1-2)^2+C(1+2)^2(1-2)+D(1+2)^2$$

$$1=3A+B-9C+9D$$

$$1=3A+\frac{1}{4}-9C+9\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2}=3A-9C \Rightarrow -\frac{1}{2}=A-3C \Rightarrow$$

$A=3C-\frac{1}{2}$ Подставим данное значение в $(*)$:

$-\frac{1}{2}=-3\left(3C-\frac{1}{2}\right)+C \Rightarrow C=\frac{1}{4}$. Найдём значение коэффициента A: $A=3\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{1}{4}$.

Тогда исходный интеграл примет вид:

$$-\left(\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^2}\right)=$$

$$=-\left(-\frac{1}{4}\ln|1-t|+\frac{1}{4(1-t)}+\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4(1+t)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|1-\cos x|-\frac{1}{4\cdot(1-\cos x)}-\frac{1}{4}\ln|1+\cos x|+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}-\frac{2\cos x}{4\left(1-\cos^2 x\right)}+C=\frac{1}{4}\ln\frac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C.$$

2. $\int\sin^3 2x\cdot\cos^2 2xdx=\int\sin^3 2x\cdot\left(1-\sin^2 2x\right)dx=$

$$=\int\sin^3 2xdx-\int\sin^5 2xdx=\left[d\left(\cos 2x\right)=\left(\cos 2x\right)' dx=-2\sin 2xdx\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sin^2 2xd\left(\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\int\sin^4 2xd\left(\cos 2x\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-\cos^2 2x\right)d\left(\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\int\left(1-\cos^2 2x\right)^2 d\left(\cos 2x\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\cos^3 2x}{6}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}+\frac{\cos^5 2x}{10}+C=$$

$$=\frac{\cos^5 2x}{10}-\frac{\cos^3 2x}{6}+C.$$

3.

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^4 x}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\mathrm{tg}x-2x+\int\cos^2 xdx=\mathrm{tg}x-2x+\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\mathrm{tg}x-2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int\cos 2xd\left(2x\right)=\mathrm{tg}x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

4. $\int\frac{dx}{\sin^8 x}=\int\frac{1}{\sin^6 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3 d\left(\mathrm{ctg}x\right)=$

$$=-\int\left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right)^3 d\left(\mathrm{ctg}x\right)=\int\left(1+3\mathrm{ctg}^2 x+3\mathrm{ctg}^4 x+\mathrm{ctg}^6 x\right)d\left(\mathrm{ctg}x\right)=$$

$$=\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}^3 x+\frac{3\mathrm{ctg}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{ctg}^7 x}{7}+C$$

5. $\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\cos^3 x}dx=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx.$

Найдём второй интеграл по частям $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=$

$$=\begin{bmatrix} u=\sin x \quad \Rightarrow & du=\cos x dx \\ dv=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx \quad \Rightarrow & v=-\displaystyle\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Таким образом, исходный интеграл равен $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+C$.

В следующих двух примерах используется подстановка $t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

6. $\displaystyle\int\frac{3}{5-4\cos x}dx=6\int\frac{1}{1+t^2}:\left(5-\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right)dt=$

$$=6\int\frac{1}{1+t^2}:\left(\frac{5+5t^2-4+4t^2}{1+t^2}\right)dt=6\int\frac{dt}{1+9t^2}=\frac{6}{9}\int\frac{dt}{\frac{1}{9}+t^2}=$$

$$=\frac{6}{9}\cdot 3\mathrm{arctg}3t+C==2\mathrm{arctg}\left(3\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

7. $\displaystyle\int\frac{5\cos x}{\sin x-3}dx=\int\frac{5\left(1-t^2\right)\cdot 2}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2\right)}:\left(\frac{2t}{1+t^2}-3\right)dt=$

$$=\int\frac{10\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}:\left(\frac{2t-3-3t^2}{1+t^2}\right)dt=10\cdot\int\frac{\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(2t-3-3t^2\right)}dt.$$

Воспользуемся методом интегрирования рациональных дробей. $\dfrac{\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(-3t^2+2t-3\right)}=\dfrac{At+B}{1+t^2}+\dfrac{Mt+N}{-3t^2+2t-3}$. Приведём дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители.

$$1-t^2=(At+B)\left(-3t^2+2t-3\right)+(Mt+N)\left(1+t^2\right)$$

$$1-t^2=t^3(M-3A)+t^2(2A-3B+N)+t(-3A+2B+M)+N-3B$$

$$\begin{cases} M-3A=0 \\ 2A-3B+N=-1 \\ -3A+2B+M=0 \\ N-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ N=1 \\ A=-1 \\ M=-3 \end{cases}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид.

$$\int\frac{5\cos x}{\sin x-3}dx=10\int\left(\frac{-t}{1+t^2}+\frac{-3t+1}{-3t^2+2t-3}\right)dt=$$

$$=10\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(-3t^2+2t-3\right)}{\left(-3t^2+2t-3\right)}\right)=$$

$$=10\left(-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|-3t^2+2t-3\right|\right)+C=$$

$$=-5\ln\left|\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|+5\ln\left|-3\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C.$$

В следующих трех примерах используется подстановка $t=\mathrm{tg}x$.

8. $$\int\frac{4dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{4}{\left(1-\dfrac{1}{1+t^2}\right)}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{4}{t^2}dt=-\frac{4}{t}+C=-\frac{4}{tgx}+C.$$

9.

$$\int\frac{3\mathrm{tg}xdx}{\left(\mathrm{ctg}^2x-1\right)}=\int\frac{3tdt}{\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)\cdot\left(1+t^2\right)}=3\int\frac{t^3dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=-\frac{3}{4}\int\frac{d\left(1-t^4\right)}{\left(1-t^4\right)}=$$

$$=-\frac{3}{4}\ln\left|1-t^4\right|+C=-\frac{3}{4}\ln\left|1-tg^4x\right|+C.$$

10. $$\int\frac{\cos^2 xdx}{\sin^4 x}=\int\frac{\dfrac{1}{1+t^2}\cdot\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2}}=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^4}=\int\frac{dt}{t^4}=$$

$$=-\frac{1}{3t^3}+C=-\frac{1}{3\mathrm{tg}^3x}+C.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{1+\cos x}dx$
2. $\int \frac{\cos x dx}{5-\sin x + 3\cos x}$
3. $\int \sin^2 x dx$
4. $\int \sin^6 x dx$
5. $\int \sin^8 x dx$
6. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
8. $\int \frac{tgx dx}{5-\cos^2 x}$
9. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 3}$
10. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$
11. $\int \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)dx}{\cos x}$

Индивидуальное задание № 6. Вычислите интегралы от тригонометрических функций.

1. $\int \frac{2\sin^4 x}{\cos^2 x - 1}dx$;
2. $\int \frac{dx}{2-\cos^2 x}$;
3. $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x}$;
4. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x + 3}$;
5. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$;
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\cos^2 x}$;
7. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \sin 2x + 4\cos^2 x}$;
8. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x}$;
16. $\int \frac{(4-3\mathrm{tg}x)dx}{3\cos^2 x + 7\sin^2 x}$;
17. $\int \frac{3\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx$;
18. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\, dx$;
19. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$;
20. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x\, dx$;
21. $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x\, dx$;
22. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos x + \cos^2 x}$;
23. $\int \frac{5\sin x - \sin^2 x}{3\cos x}dx$;

9. $\int \frac{dx}{5-4\sin^2 x}$;

10. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+7}$;

11. $\int \frac{\mathrm{tg} x dx}{\sin^2 x-2}$;

12. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg} x\left(4+\cos^2 x\right)}$;

13. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{4\cos^2 x-\sin^2 x}$;

14. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{5\sin^2 x+\cos^2 x}$;

15. $\int \frac{(5\mathrm{tg} x-3)\, dx}{2\sin^2 x-5\cos^2 x}$;

24. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x-3}$;

25. $\int \frac{\mathrm{ctg} x}{5+\mathrm{tg} x} dx$;

26. $\int \frac{(3\mathrm{tg} x+5)\, dx}{\mathrm{ctg} x}$;

27. $\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin x}$;

28. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-4\cos^2 x}$;

29. $\int \frac{\mathrm{tg} x}{5-\cos^2 x} dx$;

30. $\int \frac{\sin x+6\cos x}{3\sin x} dx$.

§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Как и для тригонометрических функций, приёмы, применяемые при интегрировании иррациональных функций, зависят от вида этих функций.

I. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, где $n\in Z$, а $R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)$ – рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$. Такие интегралы сводятся к интегрированию рациональной функции путем замены $\sqrt[n]{ax+b}=z$. Тогда $x=\frac{z^n-b}{a}$ $\Rightarrow$

$$dx=\frac{nz^{n-1}}{a}dz, \ \Rightarrow \int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\int R\left(\frac{z^n-b}{a},z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$$

Пример. Найти $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=z,\\ dx=2zdz\end{bmatrix}=\int\frac{1-z}{z^2-2z}\cdot 2zdz=2\int\frac{1-z}{z-2}dz=$$

$$=-2\int\frac{z-2+1}{z-2}dz=-2\int\left(1+\frac{1}{z-2}\right)dz=-2z-2\int\frac{d(z-2)}{z-2}=$$

$$=-2z-2\ln\left|z-2\right|+C=-2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}-2\right|+C.$$

Замечание. Интеграл более общего вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где R – рациональное выражение от x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$.

II. Интегралы вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$.

Частным случаем этих интегралов являются табличные интегралы $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$. Выражение для первого из этих интегралов было получено в § 2:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \tag{11}$$

Вычислим $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$. Сделаем замену, считая $\sqrt{x^2+m}=-x+t$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим $x^2+m=x^2-2xt+t^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-m}{2t} \Rightarrow$

$dx=\frac{2t(2t)-\left(t^2-m\right)\cdot 2}{4t^2}dt=\frac{4t^2-2t^2+2m}{4t^2}dt=\frac{t^2+m}{2t^2}dt$. Кроме того,

$\sqrt{x^2+m}=-x+t=-\frac{t^2-m}{2t}+t=\frac{t^2+m}{2t}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int\frac{\frac{t^2+m}{2t^2}}{\frac{m+t^2}{2t}}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\left[t=\sqrt{x^2+m}+x\right]=$$

$$=\ln\left|\sqrt{x^2+m}+x\right|+C\,.$$

Здесь m – это произвольное действительное число, отличное от нуля. Поэтому этот интеграл также записывают в виде:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}==\ln\left|\sqrt{x^2\pm a^2}+x\right|+C\quad(a\neq 0)\,. \tag{12}$$

Интегралы более общего вида $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$ приводятся к интегралам вида $\int\frac{Dt+E}{\sqrt{at^2+m}}dt$ заменой $t=\frac{1}{2}\left(Ax^2+Bx+C\right)'$ или путем выделения полного квадрата под знаком радикала и соответствующей заменой. Вычисление этого интеграла при $a>0$ сводится к интегралу вида (12), а при $a<0$ к интегралу вида (11).

Пример. Найти $\int\frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx$.

Решение. $t=\frac{1}{2}\left(6-2x-x^2\right)'=\frac{1}{2}\left(-2-2x\right)=-1-x\quad\Rightarrow$ $x=-1-t\quad\Rightarrow\quad dx=-dt$. Поэтому

$6-2x-x^2=6-2\left(-1-t\right)-\left(1+t\right)^2=$

$=6+2+2t-1-2t-t^2=7-t^2$. Тогда

$$\int\frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx=\int\frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}dt=\int\frac{-t+4}{\sqrt{7-t^2}}dt=-\int\frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}}+4\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(7-t^2\right)}{\sqrt{7-t^2}}+4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}=\sqrt{7-t^2}+4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\sqrt{6-2x-x^2}+4\arcsin\frac{-1-x}{\sqrt{7}}+C\,.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Решение. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \left[\begin{array}{c} x+2=t \\ x=t-2,\, dx=dt \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}} - 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| = \sqrt{t^2+1} - 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2+4x+5} - 2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

III. Интегралы видов $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ и $\int \sqrt{x^2+m}\,dx$.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \int \frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Согласно предыдущему пункту последний интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C$.

Для вычисления $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}}$ применим метод интегрирования по частям. Пусть $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+m}} \Rightarrow$ $v = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+m\right)}{\sqrt{x^2+m}} = \sqrt{x^2+m}$. Тогда

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}} = x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\,dx.$$

Итак, $\int \sqrt{x^2+m}dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}dx + m\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|$, откуда получаем

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C \right), m \neq 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right) + C, a > 0.$$

Два рассмотренных интеграла часто также относят к табличным интегралам.

IV. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$, где $R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ – рациональное выражение относительно x $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

В этих интегралах путем выделения полного квадрата под знаком радикала и соответствующей замены или подстановкой $t = \frac{1}{2}\left(Ax^2+Bx+C\right)' = Ax + \frac{B}{2}$ подкоренное выражение преобразуется к сумме или разности квадратов. Тогда интеграл $\int R\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)dx$ сводится в зависимости от коэффициентов A, B и C к одному из следующих интегралов:

1) $\int R\left(t, \sqrt{a^2-t^2}\right)dt$;

2) $\int R\left(t, \sqrt{a^2+t^2}\right)dt$;

3) $\int R\left(t, \sqrt{t^2-a^2}\right)dt$.

Эти интегралы, в свою очередь, находятся с помощью следующих подстановок:

1) $t = a \cdot \sin z$;

2) $t = a \cdot \mathrm{tg} z$;

3) $t = \dfrac{a}{\cos z}$.

Пример. Найти $\int \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx$.

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат $x^2+2x-3=\left(x^2+2x+1\right)-4=(x+1)^2-4$. Введем новую переменную $t=x+1 \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$. Тогда

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\int\frac{\sqrt{t^2-4}dt}{t^3}.$$

Далее применим тригонометрическую подстановку $t=\dfrac{2}{\cos z}$,

$$dt=\frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz;\ \sqrt{t^2-4}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2 z}-4}=2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}-1}=2\cdot\operatorname{tg}z.$$

Таким образом,

$$\int\frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt=\int\frac{2\operatorname{tg}z}{\left(\dfrac{2}{\cos z}\right)^3}\cdot\frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz=\frac{1}{2}\int\sin^2 z\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2z)dz=\frac{1}{4}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)+C=\frac{1}{4}\cdot(z-\sin z\cdot\cos z)+C.$$

Для возврата к переменной t выполним следующие преобразования: $t=\dfrac{2}{\cos z} \Rightarrow \cos z=\dfrac{2}{t} \Rightarrow z=\arccos\dfrac{2}{t} \Rightarrow$

$$\sin z=\sqrt{1-\cos^2 z}=\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2-4}}{t}.$$

Поэтому $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{t}-\frac{2}{t}\cdot\frac{\sqrt{t^2-4}}{t}\right)+C$.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x+1}-\frac{2\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\right)+C.$$

Практическое занятие № 8. Интегрирование иррациональных функций.

Примеры вычисления интегралов от иррациональных функций:

1. $$\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx=\int \frac{2x+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^2}{3\sqrt[4]{2x-3}+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^3}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\sqrt[4]{2x-3}=z\Rightarrow 2x-3=z^4\Rightarrow \\ x=\dfrac{z^4+3}{2}\Rightarrow \\ dx=\dfrac{4z^3}{2}dz=2z^3dz\end{array}\right]=\int \frac{z^4+3+z^2}{3z+z^3}\cdot 2z^3dz=$$

$$=2\int \frac{z^6+z^4+3z^2}{3+z^2}dz=2\left(\int \frac{z^6}{3+z^2}dz+\int \frac{z^2\left(z^2+3\right)}{\left(3+z^2\right)}dz\right)=$$

$$=2\left(\int \frac{\left(\left(z^2\right)^3+3^3\right)-3^3}{3+z^2}dz+\frac{z^3}{3}\right)=2\int \frac{\left(z^2+3\right)\left(z^4-3z^2+9\right)}{3+z^2}dz-$$

$$-\frac{54}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+\frac{2z^3}{3}=2\left(\frac{z^5}{5}-\frac{3z^3}{3}+9z-\frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+\frac{z^3}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{2z^5}{5}-\frac{4z^3}{3}+18z-\frac{54}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2(2x-3)\sqrt[4]{2x-3}}{5}-\frac{4\sqrt[4]{(2x-3)^3}}{3}+18\sqrt[4]{2x-3}-\frac{54}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{(2x-3)}{\sqrt{3}}+C.$$

2.

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t\Rightarrow(1+x)t^2=1-x\Rightarrow\left(t^2+1\right)x=1-t^2\Rightarrow\\ x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Rightarrow dx=\dfrac{-2t\left(1+t^2\right)-2t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\dfrac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt\end{array}\right]=$$

$$=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-4\int\frac{t^2dt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}.$$

Разложим рациональную дробь $\dfrac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}$ на сумму простейших рациональных дробей $\dfrac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}=\dfrac{A}{1-t}+\dfrac{B}{1+t}+\dfrac{Ct+D}{1+t^2}$.

Вычисляя коэффициенты $A=B=\dfrac{1}{4},\ D=-\dfrac{1}{2},\ C=0$, получаем

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-t}+\frac{\frac{1}{4}}{1+t}-\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

3. $$\int\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=\int\frac{(x-1)^3}{\sqrt{(x-1)^2+4}}dx=\left[\begin{array}{c}t=x-1\\ dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{t^3}{\sqrt{t^2+4}}dt=$$

$$=\left[\begin{array}{c}t=2\operatorname{tg}z\\ dt=\dfrac{2}{\cos^2 z}dz\end{array}\right]=\int\frac{8\operatorname{tg}^3 z}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 z+1}}\cdot\frac{2}{\cos^2 z}dz=8\int\frac{\frac{\sin^3 z}{\cos^3 z}}{\frac{1}{\cos z}}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}dz=$$

$$=8\int\frac{\sin^3 z}{\cos^4 z}dz=-8\int\frac{\sin^2 z d\left(\cos z\right)}{\cos^4 z}=\left[p=\cos z\right]=-8\int\frac{\left(1-p^2\right)}{p^4}dp=$$

$$=-8\int\left(p^{-4}-p^{-2}\right)dp=8\left(\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{p}\right)+C=8\left(\frac{1}{3\cos^3 z}-\frac{1}{\cos z}\right)+C=$$

$$=\begin{bmatrix} t=2\operatorname{tg} z\Rightarrow \\ \Rightarrow z=\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\end{bmatrix}=8\left(\frac{1}{3\cos^3\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)}-\frac{1}{\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)}\right)+C=$$

$$=\left[\begin{array}{c} 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\Rightarrow \\ \Rightarrow\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)}}=\dfrac{2}{\sqrt{4+t^2}},\ \text{т.к.}-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=8\left(\frac{\left(4+t^2\right)\sqrt{4+t^2}}{24}-\frac{\sqrt{4+t^2}}{2}\right)+C=\frac{1}{3}\left(4+t^2\right)\sqrt{4+t^2}-4\sqrt{4+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2-2x+5\right)\sqrt{x^2-2x+5}-4\sqrt{x^2-2x+5}+C.$$

4. $$\int\frac{\left(x+2\right)^3}{\sqrt{-x^2-4x-3}}dx=\int\frac{\left(x+2\right)^3}{\sqrt{1-\left(x+2\right)^2}}dx=\begin{bmatrix} t=x+2 \\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$=\begin{bmatrix} t=\sin z \\ dt=\cos z dz\end{bmatrix}=\int\frac{\sin^3 z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}\cos z dz=\int\frac{\sin^3 z}{\cos z}\cos z dz=\int\sin^3 z dz=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 z\right)d\left(\cos z\right)=-\cos z+\frac{\cos^3 z}{3}+C=\begin{bmatrix} t=\sin z\Rightarrow \\ \Rightarrow z=\arcsin t\end{bmatrix}=$$

$$=-\cos\left(\arcsin t\right)+\frac{1}{3}\cos^3(\arcsin t)+C=\left[\begin{array}{c}\cos(\arcsin t)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}=\\ =\sqrt{1-t^2}\text{, т.к. }-\frac{\pi}{2}\le\arcsin t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=-\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{3}\left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}+C=-\sqrt{-x^2-4x-3}+$$

$$+\frac{1}{3}(-x^2-4x-3)\sqrt{-x^2-4x-3}+C\,.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\int\frac{\left(1-\sqrt[3]{2x}\right)dx}{\sqrt{2x}}$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$
3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$
4. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$
5. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$
6. $\int\frac{dx}{\left(x-1\right)\sqrt{x^2-3x+2}}$
7. $\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+5\right)^{\frac{3}{2}}}$
8. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

Индивидуальное задание № 7. Вычислите интегралы от иррациональных функций.

1

1.1 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2x+1}}$

1.2 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4x-1}}$

1.3 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-4}}$

1.4 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x-4}}$

1.5 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{2x+4}}$

1.16 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$

1.17 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$

1.18 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

1.19 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{5x+1}}$

1.20 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{2x+3}}$

2.6 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{2x-1}}$

2.7 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x+5}}$

2.8 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

2.9 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+5}}$

2.10 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{6x+1}}$

2.11 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{5x+5}}$

2.12 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{x-3}}$

2.13 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{2x-1}}$

2.14 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{6x-4}}$

2.15 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4x-6}}$

1.21 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

1.22 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x-2}}$

1.23 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$

1.24 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-2}}$

1.25 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2x+5}}$

1.26 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{6x-2}}$

1.27 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{4x-3}}$

1.28 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{3x-6}}$

1.29 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{6x-2}}$

1.30 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{6x+3}}$

2

2.1 $\int \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x-1)^3} dx$

2.2 $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

2.3 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$

2.16 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$

2.17 $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{(x+2)^3} dx$

2.18 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{4x-x^2-3}} dx$

2.4 $\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{(x-2)^3}dx$

2.5 $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

2.6 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

2.7 $\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^3}dx$

2.8 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

2.9 $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

2.10 $\int \frac{\sqrt{x^2-2x-8}}{(x-1)^3}dx$

2.11 $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$

2.12 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$

2.13 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{(x+1)^3}dx$

2.14 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$

2.15 $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$

2.19 $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$

2.20 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^3}dx$

2.21 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

2.22 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

2.23 $\int \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{(x-2)^3}dx$

2.24 $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{-4x-x^2}}dx$

2.25 $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$

2.26 $\int \frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{(x-2)^3}dx$

2.27 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$

2.28 $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$

2.29 $\int \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{(x+2)^3}dx$

2.30 $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

Литература

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб: Профессия, 2005. – 432 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. – М.: Астрель: АСТ, 2002. – 495 с.
3. Ильин В. А. Высшая математика: учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Велби: Проспект, 2008. – 600 с.
4. Ильин В. А. Математический анализ: учебник: в 2 ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; под ред. А. Н. Тихонова. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Велби: Проспект, 2006. – 672 с.
5. Краткий курс высшей математики: учебное пособие для втузов: в 2 т. Т. 1 / В. Е. Шнейдер [и др.]. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1978. – 384 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа: в 2 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды. – 2-е изд., перераб. и доп. – Висагинас: Alfa, 1998. – 400 с.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие: в 3 ч. Ч. 2 / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Мн: Выш. шк., 1991. – 352 с.

Учебное издание

Богданова Елена Анатольевна,
Богданов Сергей Николаевич,
Богданов Павел Сергеевич

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов

Самарский филиал ГАОУ ВО города Москвы
«Московский городской педагогический университет»,
443081, г. Самара, ул. Стара-Загора, 76.

Формат $60\text{x}90^{1}/_{16}$.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 4,875.